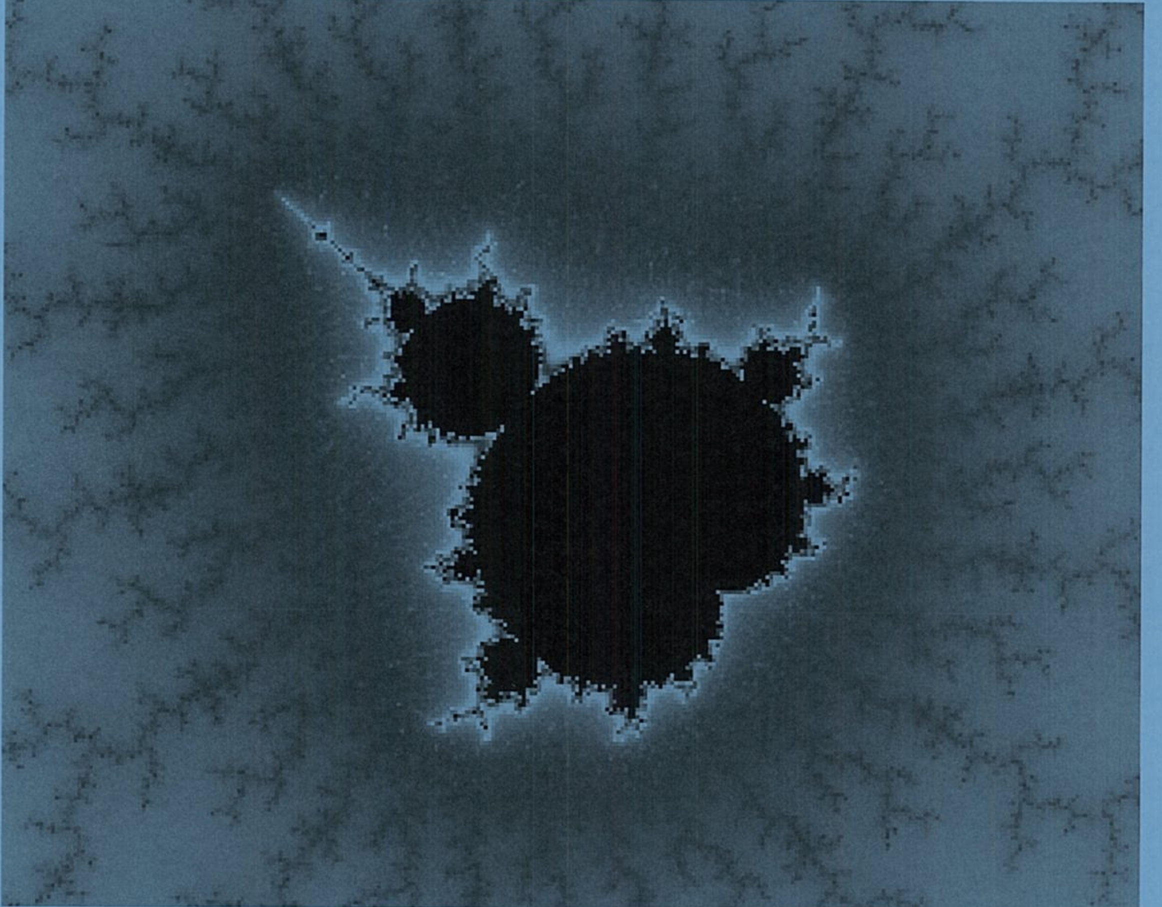
平成30年度

「課題研究」研究集録



福島県立福島西高等学校　数理科学科

積分してみた

福島県立福島西高等学校　数理科学科　3年　1班
阿部瑚心　井幡莉菜　川内谷麗花　菅野千里　橋本　萌　星　彩斗

Jul-2018

1　研究の背景

私たちの班は、２次元のアニメを３次元にするという意味を込めて、「積分してみた」をテーマに研究をした。

世間一般で、頭の硬い大人たちは、「アニメばかり見ていると頭が悪くなる。」「現実とフィクションの区別がつかなくなる。」とよく言う。

昨年、神奈川県座間市で発生した９人の遺体事件に対してある国会議員はテレビで「猟奇的なストーリーのアニメの影響を受けていますね。」と発言した。

果たして本当にそうなのか、私たちは疑問を持った。

2　研究の目的

私たちは、それぞれ印象に残っているアニメの１場面を計算や実験により、実現可能なのか不可能なのかを科学的に検証した。

その結果、アニメと現実の違いを改めて理解することにより、よりアニメを楽しもうと考えた。

3　６つの研究

（1）セカンドインパクト
～『新世紀エヴァンゲリオン』より～

①　概要

アニメ『新世紀エヴァンゲリオン』の世界で発生した、架空の大規模災害、セカンドインパクトをテーマに研究をした。

作中ではアダムという使徒によって南極で大爆発（セカンドインパクト）が起こり、それによって南極の氷が全て溶ける。

今回は、その時に発生する熱量と海洋への影響を調べた。

②　方法

南極の氷の体積・温度を調査し、氷の比熱、融解熱から全ての氷が溶けるまでの熱量を求める。熱量を爆弾に換算し、海水面の上昇高度も算出する。

③結果

（ア）南極の氷の体積、平均気温の調査

氷の体積⇒約 2500 万 km^3

平均気温⇒－6℃

（イ）全ての氷を溶かすのに必要な熱量(J)を算出

氷の比熱⇒$\mathbf{2.1}[J/g\cdot K]$

融解熱⇒$\mathbf{333.5}[J/g]$

※氷の密度は$0.917\left(g/cm^3\right)$とする。

$$2.5\times10^7\times10^{15}\times0.9168\times(6\times2.1+333.5)$$
$$=793261.2\times10^{19}$$
$$=\mathbf{7.9\times10^{24}}[\mathrm{J}]$$

これは、第二次世界大戦時に広島市へ投下されたヒロシマ原爆約 1300 億個分に相当する。

※ヒロシマ原爆⇒約 50ｋｇのウラニウム型原爆。1 個$6.1\times10^{13}[J]$

※ただし、原子力爆弾が爆発する際に発生する、爆風、衝撃波、爆音、放射線などのエネルギーは全て熱エネルギーに使われるとする。

（ウ）海水面の上昇高度(m)

・地球の表面積

$$4\times3.14\times(6371)^2$$
$$=509805890.96\,km^2$$

以下の式で上昇高度を算出する。

$$\frac{氷の体積\times\dfrac{氷の密度}{水の密度}}{地球の表面積}$$

$$=\frac{2500\,万km^3\times\dfrac{1000\times10^5\left[kg/m^3\right]}{917\times10^5\left[kg/m^3\right]}}{509805890.96\,km^2}$$
$$=0.0534517165909683\,\mathrm{km}$$
$$=\mathbf{約53m}$$

・国内外の主要都市

東京都新宿区　41.3m

神奈川県横浜市　2.4m

福島県福島市　66.9m

ニューヨーク　10m

ロンドン　24m

パリ　33m

南極の氷が全て溶けると、国内外の主要都市はほとんど海に沈む。

しかし、私たちが住む福島市は沈まずに残る。

③　考察

・現実世界では、地球温暖化に伴う海水面の上昇によって、生態系が崩れつつある。

・生態系のバランスは全生物にとって必要であり、地球温暖化の進行を防ぐことは我々人間の責務である。

・私たちが行動することによって地球環境の保全につなげる。

【研究者：阿部瑚心】

（２）アンパンチの威力

～『それいけ！アンパンマン』より～

①　概要

アンパンマンは、バイキンマン、ドキンちゃん、カビルンルンなどたくさんの敵を倒す。では、そのときに使うアンパンチの威力はどのくらいなのだろうか。

②　方法

方法はバイキンマンの身長体重を設定しバイキンマンが第一宇宙速度で飛ばされたと仮定してアンパンチのエネルギーを求める。

③　結果

設定した身長・体重と第一宇宙速度で運動エネルギーを求めると

３．２８×10^{9}（J）になる。

ダイナマイト１ｔのエネルギーが

４．１８×10^{9}（J）

よって、アンパンチの威力はダイナマイト約８００ｋｇに匹敵する。

④　考察

将来、アンパンマンが作られたら世界で最もこわい兵器になるのだなとおもった。

【研究者：橋本萌】

（3）瞬間移動
～『ハローキティりんごの森シリーズ』より～

①　概要

このアニメは、キティとミミィが別世界にトリップし、その世界のさまざまな事件を解決するストーリーだ。

そこで、本当に現実でトリップすることができるのか研究した。

②　方法

キティちゃんについて詳しく調べワープ、瞬間移動など、可能か調べる。

不可能な場合、理由を探る。

③　結果

キティとミミィの身長は、りんご５個分、体重はりんご３個分であり、りんご１個 10ｃｍ、300ｇと仮定するとキティたちの身長は約 50ｃｍ、体重は約 900ｇとなり、生後３ヶ月の子猫と同じくらいだ。

アルクビエールワープ航法によると、時空を収縮させる波を作るには、負のエネルギーが必要だが、古典力学はすべて正のエネルギーであり、局所的に時空の歪みを作れるほどの密度にできないからワープは不可能である。

瞬間移動は理論上可能であり、自分がいる周波数と自分の行きたい場所の周波数をあわせることが必要だ。この仕組みを使ってキティたちはトリップしていたのだろう。

しかし、現在の技術では実現できていない。

④　考察

現実ではトリップはできない。

しかし、ワープや瞬間移動には、波や周波数が関係している。

それを解明し、空間を折りたたむことができれば、トリップが実現すると考える。今後は、音速や高速に近い速度で、空間を圧縮する実験や計算に取り組んでいきたい。

【研究者：菅野千里】

（4）立体音響
～『魔法科高校の劣等生』より～

①　概要

私は、「魔法科高校の劣等性」を題材に研究した。

場面は、魔法科高校の劣等性第3話の対決シーンで、立っている状態の相手を船酔いと同じ状態にして気絶させる場面だ。

②　方法

私はこれを立体音響を使ってできないかと考え研究した。

③　結果

結果的には、音で酔って気絶する事例はほとんどなく、絶対音感を持つ人や音にものすごく敏感な人なら気持ち悪くなることはあるが、気絶するほど酔うことはない。

④　考察

音により船酔いのような状態にして気絶させることは難しいことがわかった。

アニメの中で成立していることを現実で実現させることは不可能に近いが、緊急地震速報や国民保護サイレンの音に怖い音が使用されていることがわかった。

今後は、緊急地震速報や国民保護サイレンの周波数や和音を研究し、人体への影響を調べてみたい。

【研究者：川内谷麗花】

（5）メーヴェ
～『風の谷のナウシカ』より～

①　概要

ジブリ映画『風の谷のナウシカ』について調べた。

この映画の中では、主人公であるナウシカがメーヴェと呼ばれる飛行具を用いている。

映画の中では、加速や高速飛行する場面も描かれている。

しかしそれらは二次元、つまり空想世界の話である。

果たして、それらは現実世界で可能なのかどうか考えてみた。

② 方法

最初に仮定として、

ナウシカ 16歳 160〜165cm 約55kg

メーヴェ 横約5m 縦約1m 高さ1m 約12kgとし、

よってナウシカとメーヴェを合わせた重さの合計67kg、翼の表面積5㎡となる。

○研究内容

(ア)飛行機が飛ぶ仕組み→揚力が大きく関係している。

(イ)メーヴェの表面積の大きさで飛べるかどうか

(ウ)メーヴェ自体は何で出来ているのか、素材など

以上の３つより、

現在の日本にある技術、素材で作ることが可能かどうか考えてみた。

③ 結果

$1cm^2$あたり70gの差圧が生じれば飛ぶことが可能であり、ナウシカとメーヴェを合わせた重さの合計67kgを67000g、飛ぶために必要な表面積をxとし、以下のような式をたてた。

$70g : 1cm^2 = 67000g : xcm^2$

$x = 957.143$ …①

①より、この数値は翼の表面積である$50000cm^2$より小さいので、飛ぶこと自体は可能である。

しかし、メーヴェの重さ 12kg を12000g、メーヴェの体積$5000000cm^3$とし、以下のような式をたてると、

$12000g \div 5000000\,cm^3 = 0.0024\,g/cm^3$

となり、その密度をみたす素材が存在しないので、作ることは不可能である。

④ 考察

以上のことより、メーヴェの翼の表面積は飛ぶのに十分な大きさだが、$5cm^3$で12kg という密度の素材が存在しないので、現在の現実世界で作ることは難しい。

しかし、密度の小さいアルミニウムやチタンまたは気体の水素・ヘリウムを組み合わせて、軽くて質量にも耐えられる機体ができるかどうか、今後研究を続けていきたい。

【研究者：井幡莉菜】

（6）声のエネルギー
〜『ラブライブ』より〜

① 概要

ラブライブ二期第一話において主人公である高坂穂乃果は「雨やめぇぇぇぇ！」と叫ぶことで雲を吹き飛ばすことを可能にした。

果たして本当に雲を声で吹き飛ばすことは可能なのか調査した。

② 方法

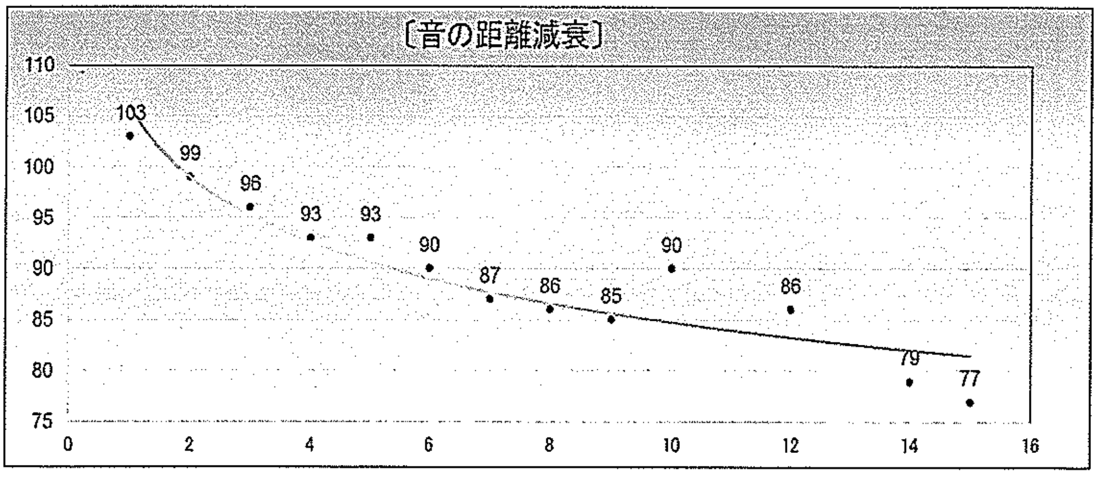
（ア） 音の距離減衰を調査し、グラフ化する。

（イ）雲を吹き飛ばすことができるエネルギーを調べ、音源との距離から逆算する。

（ウ）雲を吹き飛ばす以外の現象について調査する。

以上の順序に従い調査する。

③ 結果



上の表は荒川の河川敷で後輩と一緒に計測した音の減衰をグラフ化したものである。

グラフから見て取れるように音の減衰には限界がある。

そして音は対数的に減少する。

以下の計算は音の距離減衰を底を 10 とする常用対数を使い計算を行うものとした。

20×log10(発生源との距離[m])＝音の減衰量[dB]

$20\times\log_{10}18000[\mathrm{m}]$ ＝音の減衰量[dB]

$20\times\log_{10}1.8\times10^{4}[\mathrm{m}]=20\times0.2553\times4[\mathrm{dB}]$

$=20.42400$

計算より 18km 先で 20dB 音圧が減少する。

パプアニューギニアでのダブルブル火山の爆発の動画を参考に 18km 先の雲を吹き飛ばすには地上で約 200dB の音圧を発生させれば可能であることが分かる。

④ まとめ

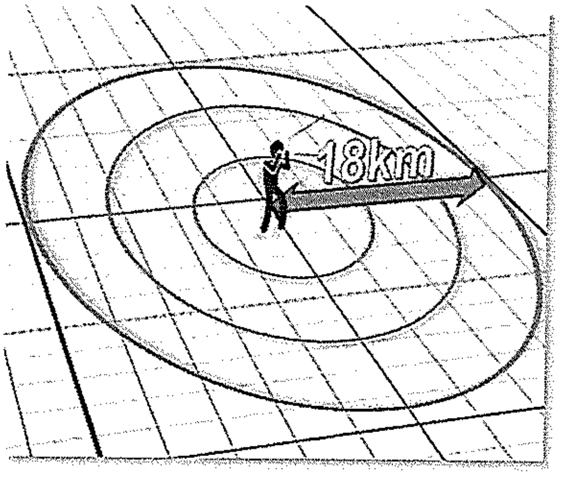
（ア）200ｄB というのは地球上で今発することのできるどの音よりも大きい。

よって現在の人類には 200ｄB の声を発することは不可能である。

（イ）もし自然界の摂理を根底から覆し、無理やりにでも声を出そうとした場合声の大きさはのどの筋力と純粋に比例すると考えると、のどのくびれは筋肉でなくなり人類からは遠くかけ離れた容姿を持つ生物となってしまう。

（ウ）発生した衝撃波は立体同心円状(ドーム状)に広がるため横にも広がる。

よって高坂穂乃果の立っている位置から18km 圏内の構造物は崩壊し、中心に近い地点では建物は声のエネルギーで消滅する。



（エ）声のエネルギーは衝撃波を起こすだけではない。気圧変化も発生させる。

かつて、火山の爆発で 5800ｋｍはなれた地点で 1.45ｈPa の気圧の上昇が確認された例がある。

今回の事例だと発生源の上空であることに加え、発生した音圧も参考にした火山よりも大きいため 1.45ｈPa よりも大きくなってしまう。

よって発生源である少女は気圧の変化に体が耐え切れず破裂してしまう。

（オ）急激な気圧変化は日本を中心として世界各国に広がり、各地で異常気象を発生させる。

総じていえることは「雲を声で吹き飛ばさないほうがいい」ということであるが、将来的には音圧で気象を変化させることを可能とする装置がもしかしたら発明されるかも知れない。

ぜひそのときは私自身がその装置を開発し、[アニメが世界を変え、常識を覆すことは可能なのだ！]と声を大にして言いたい。

【研究者：星彩斗】

4　結言

課題研究の結果から、いずれもアニメの1場面を現実世界で再現するのは、数学的・物理的計算により難しいことが分かる。

しかし、アニメには人類の夢がつまっている。

現実とアニメの相違点を科学的に理解しながら、引き続きアニメを楽しみ、友達にも現実とアニメの相違点を説明しくことが、この研究をした私たちの使命である。

私たちはこれからも夢を持ち追い続けることによって、科学の発展に貢献していきたい。

また、海外でのアニメの評価は「Cool Japan」として、以下のように評価がとても高い。

●とても細かいところまで描いている。作品にいろんな意味、メッセージが詰まっている点も好きです。(アメリカ；女性)

●キャラクターに人間味があり、様々なことを題材にしたアニメがあって、素晴らしい。(韓国；男性)

●子どもだけでなく、大人に向けてもアニメを作っていて、ユーモアがある。
(スウェーデン；男性)

日本のアニメは、間違いなく世界に輸出できる優れたコンテンツである。

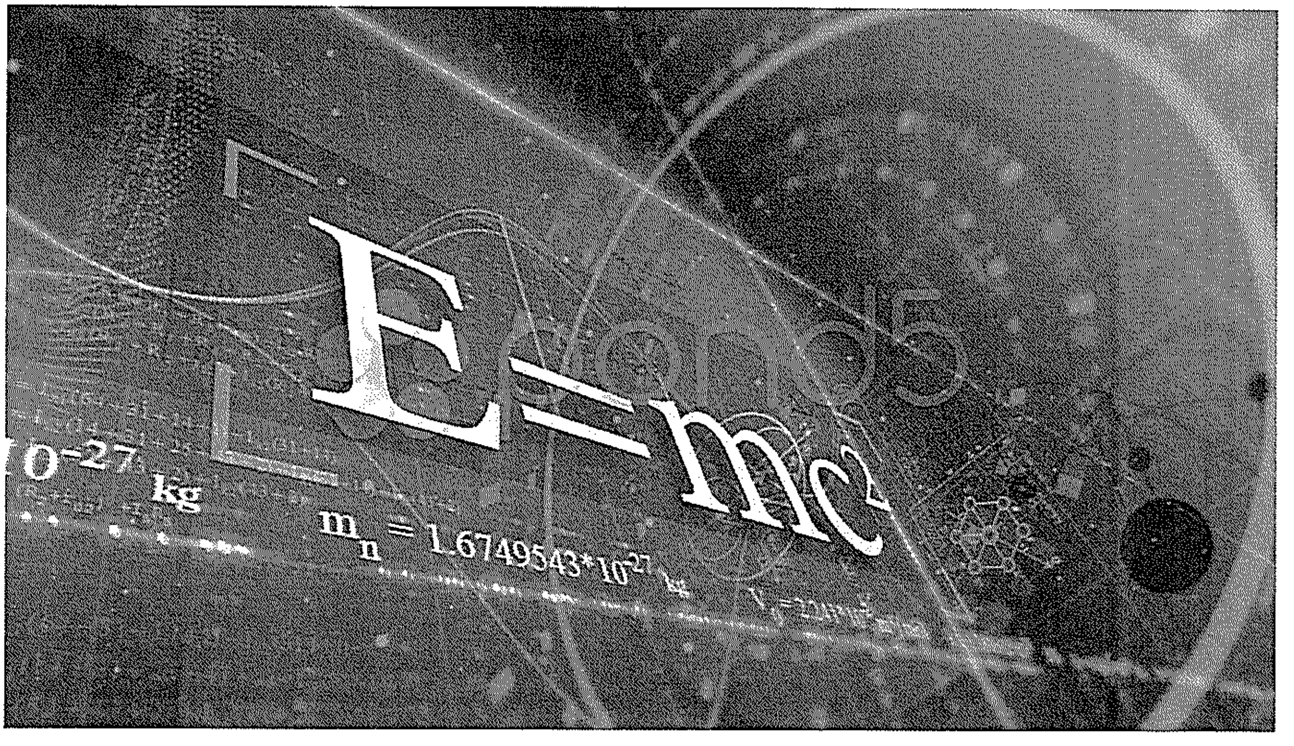
5　参考文献

『空想科学読本　4，5』　柳田　理科雄著
『時空のからくり』　山田　克哉　著
『時間とはなんだろう』　松浦　壮　著
『量子テレポーテーション』古澤　明　著
『新物理学事典』　大槻　義彦　編
『ナウシカの飛行具、作ってみた』　八谷　和彦　著
『音のなんでも小事典』日本音響学会　編
『音のしくみ』　中村　健太郎　著
『クラカトアの大噴火』　サイモン・ウィンチェスター　著

6　謝辞

福島大学共生システム理工学類
准教授　笠井博則先生
准教授　中川和重先生
ご指導ありがとうございました。

身近な謎を物理で調べる
課題研究　2 班



- 安齋　洸
- 安藤　航輝
- 猪狩　光汰
- 酒井　拓海
- 佐藤　葵
- 首藤　大雅

テーマ１「共振について」

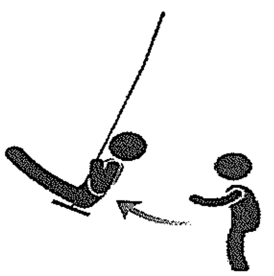
１．　研究動機

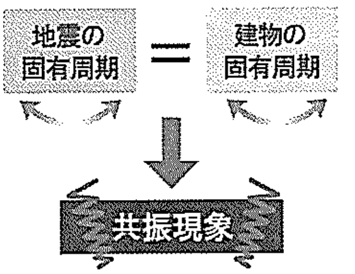
共振で端が崩れる動画を見て、風の力でも巨大な建造物を破壊できるということを知りそこから興味がわき身近なもので共振が関係しているものがあるか調べようと思った。

２．　共振とは

振動体に固有振動数と等しい振動が外部から加わると、振動の幅が大きくなる現象で台風や地震で揺れる建物や橋、

ブランコなどがあります。





３．　共振と関係がある固有振動数を求める公式

固有振動数 Hz（1 秒間に物体が振動する回数）

例）50Hz の場合、1 秒間に 50 回振動する

固有振動数ｆｎは、下の数式で表される。

固有振動数 Fn〔Hz〕　ばね定数ｋ〔n/m〕　質量ｍ〔ｋｇ〕

$Fn=\mathbf{1/2\pi}\ \sqrt{(\boldsymbol{k/m})}$

4. 固有振動数について

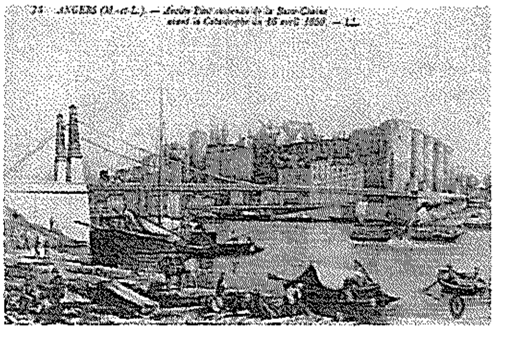
固有振動数は、高い方が共振が発生しにくく低いほうが発生しやすいので、高いほうがいいといわれています。

高くするには…

質量mを小さくする

ばね定数kを大きくする→変形しづらくする。

5. 共振による事件



1850年フランスのバス・シェーヌ吊橋

事故原因…500人の歩兵隊が吊橋の上を歩き歩調が合い共振が起きて、487人落下、226人の死者が出る

1940年アメリカワシントン州

タコマナローズ橋

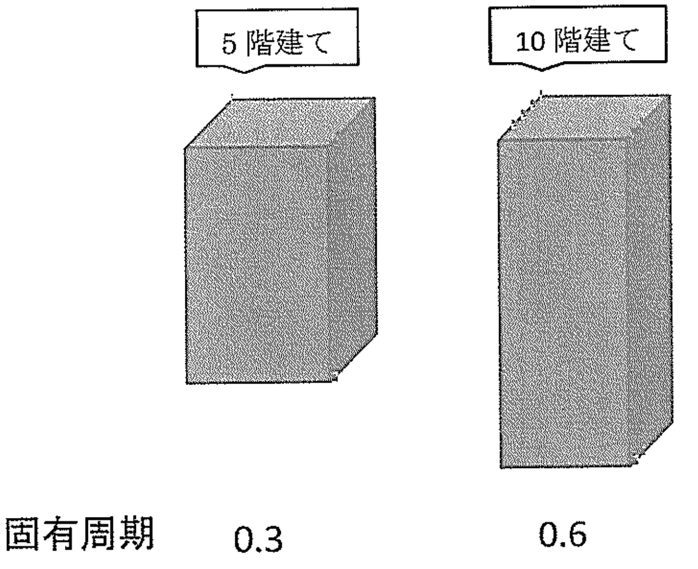
事故原因…風速19m/sの風により、橋が揺れ崩壊した。

6. 共振が起きる建造物の高さ

地震の固有周期は、0.6～1.2　建造物一階につき 3mとすると

五階建ての固有周期→0.3

十階建ての固有周期→0.6



7.　　　まとめ

このように 10 階建てが 1 番揺れやすいが、現在の建物には免震構造というものが使われているため大きな被害があまり出ないことがわかった。

このことより、自分たちが調べるきっかけになった動画のような災害が、起きないように対策がされているのがわかった。

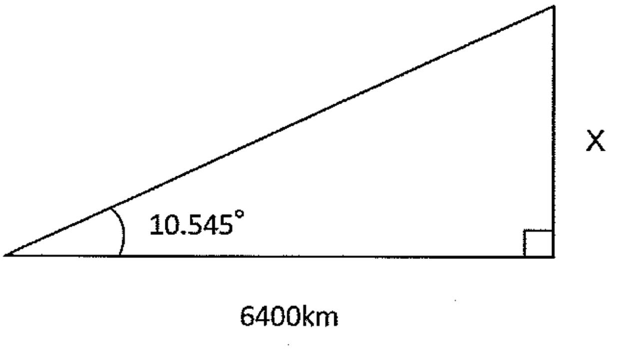
テーマⅡ　日本全体が視認できる花火を打ち上げる

1　日本の主な情報
択捉島の北緯を　　45.33°
与那国島の北緯を　24.26°とする
（国土地理院参照）

45.33-24.26＝21.09°　（日本全域の角度）
21.09÷2＝10.545　（日本の半分の角度）

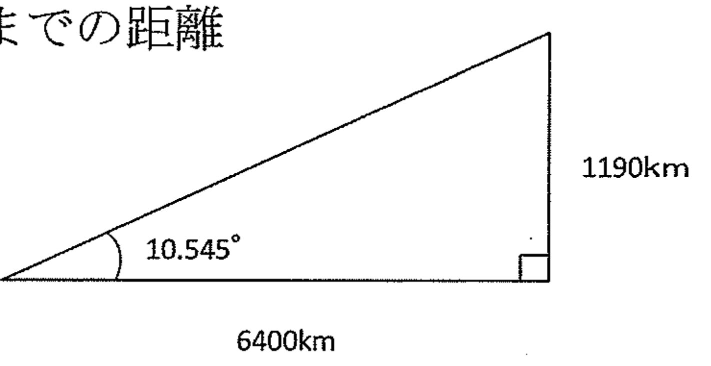
2 日本の端から花火を打ち上げる場所までの距離

X÷6400＝10.545°
X＝1191ｋｍ



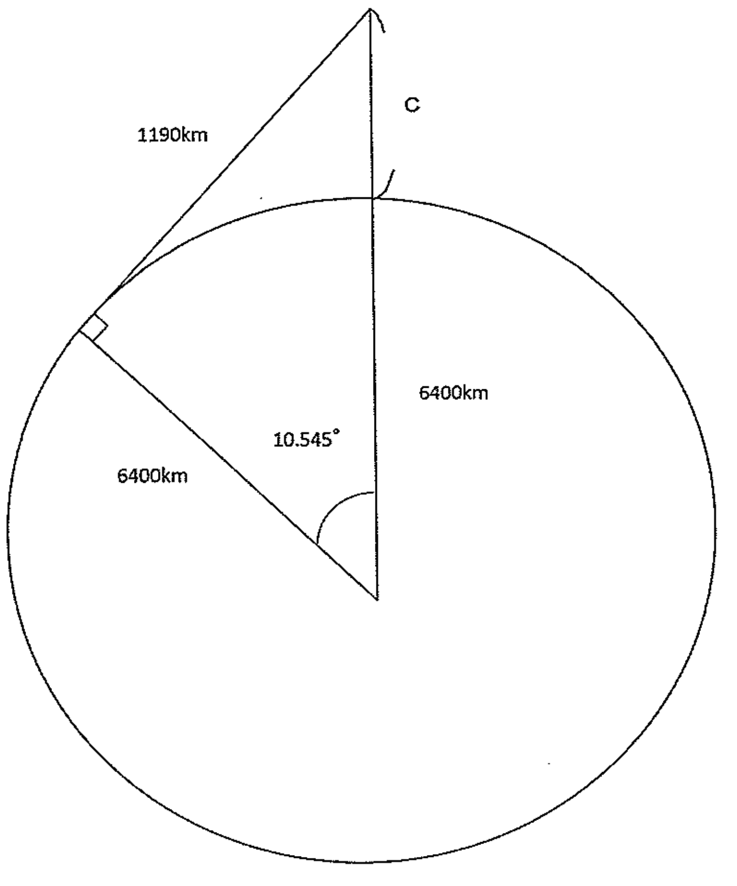
3 地球の中心から花火までの距離

Y^2＝6400^2+1191^2
Y ≒6510ｋｍ



4 陸地から花火までの距離

6510ｋｍは地球の半径も含めた距離なので
地球の半径を引く
C＝6500-6400
C＝110ｋｍ



このことから
陸地から 110ｋｍ以上上に
花火を打ち上げると、
日本全体が花火を
視認することができる。

5 花火を打ち上げる条件

今まで求めたことを条件とする

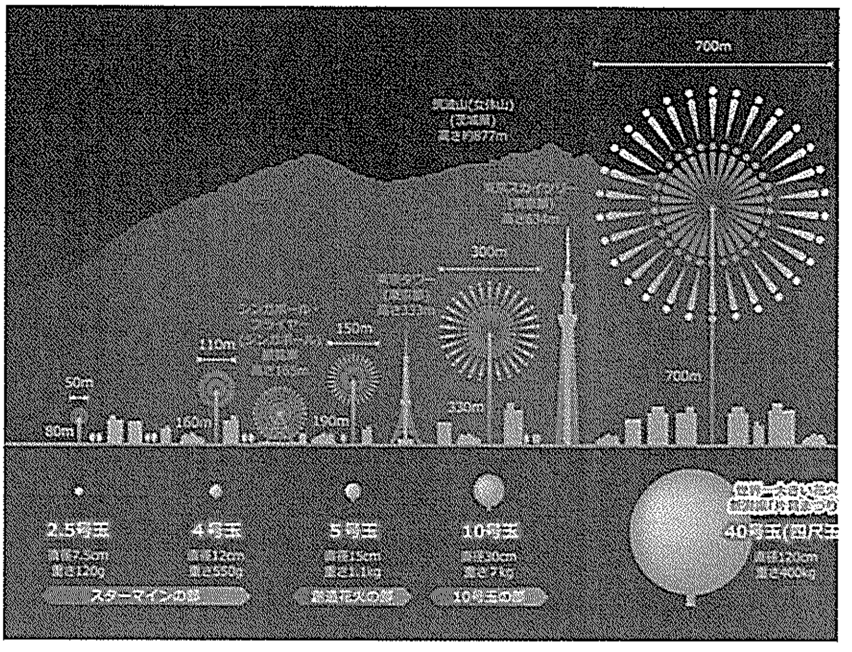
日本の端から端までの距離	2250ｋｍ
地球の半径	6400ｋｍ
日本の角度	21.09°
日本の両端から花火を見ることができる距離	1190ｋｍ
日本から花火を打ち上げる高さ	110km

6 花火の大きさ

花火は号という単位で表され、10 号を一尺と表す。
今回打ち上げる花火を一尺球と仮定する。

1 尺球花火の特徴
・高度　　　330m
・開花直径　　300m

1 尺球の特徴
・直径　　　30ｃｍ
・重量　　　7ｋｇ



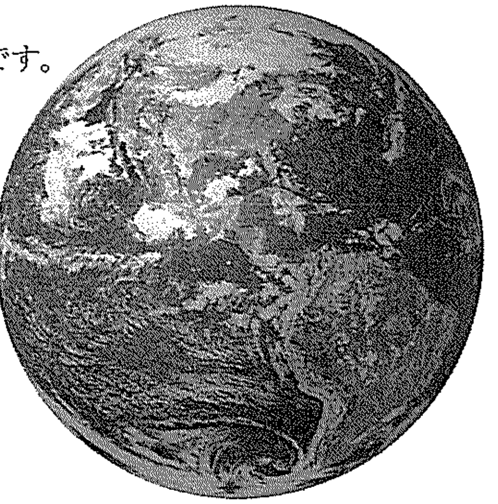
7 花火を打ち上げる

花火の大きさを 300m で見えるものとして、

1125ｋｍ×0.3km = 337.5km
337.5km + 110km =447.5km（花火の最高到達点）

ちなみに地球から 447.5ｋｍはスパイ衛星が飛ぶ高さです。

337.5÷2= 168.75
168.75+110 = 278.75



これが花火の中心の高さになります。
よって地球から 278.75ｋｍの高さに
花火を打ち上げれば
日本全体が花火を視認することができます。

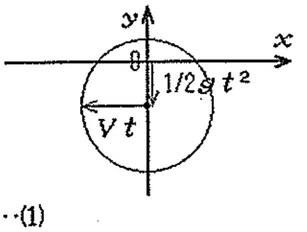
右図は地球と比べた花火のサイズになる

8 打ち上げ花火の方程式

原点から等しい速さ V で、四方八方へいっせいに投げ出された無数の質点はどのような軌跡を描き、全体としてどのような運動をするのかまとめてみました。

花火を球と考えて
空気抵抗は考えず、重力のみが作用するとすれば、
各質点の時刻ｔにおける座標は

$$x=V\cos\theta\cdot t$$
$$y=V\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$$



です。これらからθを消去すると

$$x^2+(y+\frac{1}{2}gt^2)^2=(Vt)^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

となります。

つまりこれは半径がＶｔで中心の座標が（０，－1/2・ｇｔ2）であるような円の方程式です。等速で広がりつつ自由落下する球というわけです。

あらゆる放物運動は、重力がない場合の初速度のみによる等速直線運動と、初速度０で重力のみによって起こる自由落下運動の合成として説明できるとすると、
重力がない場合は無数の質点は原点を中心に一定の速さＶで広がる球面を構成しているから、実際の運動はこれら球面をなす質点群を一斉に自由 落下させたもの
になります。
これが「花火の運動」です。

さらに式（1）をｔ２についての二次方程式と見て、実根条件すなわち現実に起こりうるための条件を作ると、判別式より最終的に

$$y \leqq -\frac{g}{2V^2} \cdot x^2 + \frac{V^2}{2g} \quad \cdots\cdots(2)$$

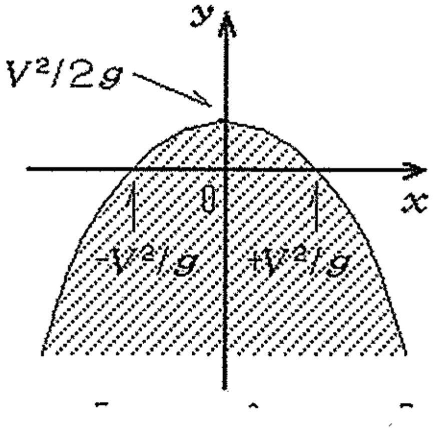
を得ます。
これは原点が

$$y = \frac{V^2}{2g} \quad \text{（※鉛直投射の最高到達高度）}$$

にあり、ｘ軸との交点が

$$x = \pm\frac{V^2}{g} \quad \text{（※斜方投射の最大水平到達距離）}$$

であるような上に凸な放物線の内部にあたります。



この曲面は、先の落下する球体の包絡面になっており、投げられた物体はその外部には決して出ることはできません。

放物体を標的に当てようとする場合、標的がこの回転放物面の傘の内部になければ、どんな角度に放ってみても決して届くことはないのです。
速度に比例する空気抵抗がある場合、各質点の時刻ｔにおける座標は、空気抵抗力をｋｍｖとして（一般の空気抵抗係数をｍで割ったものをｋとする）

$$x=\frac{V\cos\theta}{k}(1-e^{-kt})$$
$$y=-\frac{g}{k}t+\frac{1}{k}(V\sin\theta+\frac{g}{k})(1-e^{-kt})$$

となります。$E=1-e^{-kt}$とおいて式を整理すると、

$$x=\frac{VE}{k}\cos\theta$$
$$y-\frac{g}{k^2}E+\frac{g}{k}t=\frac{VE}{k}\sin\theta$$

となり、これよりθを消去すると、

$$x^2+\left\{y+\left(\frac{g}{k}t-\frac{g}{k^2}E\right)\right\}^2=\left(\frac{VE}{k}\right)^2 \quad \cdots\cdots(3)$$

を得ます。

これは空気抵抗がない場合の式(1)に相当するものです。
やはりｙ軸上を落下する円（球）の方程式になっていることがわかります。
つまり、空気抵抗があっても花火の形は崩れないのです。

式(3)のパラメータＥは時間の経過につれ０→１となるので、球の半径はＶ／ｋ より広がることはありません。

これが上で述べた回転放物面の裾の円筒の半径です。初速度Ｖで水平投射した放物体が最も遠くまで達しますが、そのｘ座標はＶ ／ｋに漸近します。
球の中心のｙ座標は十分時間が経つと、よく知られている終端速度ｇ／ｋで落下することになります。

9 まとめ

以上のことから
日本全体が視認できる花火を打ち上げることは理論的に可能ですが
現実的ではないことがわかりました。

世界でもっとも美しい結晶

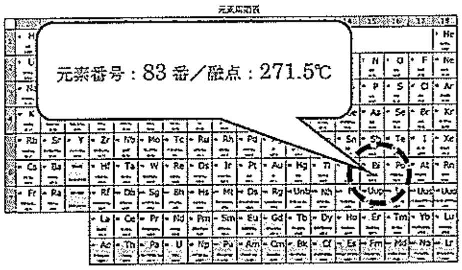
第3班
中山楓　佐藤夏海　佐藤優莉　佐藤里紗　茂木陽

【１】研究の動機・目的

動機 ： ある動画サイトで「ビスマス結晶を作ってみた」という動画を観て自分たちで作りたいと興味を持った。

目的 ： ビスマス結晶と他の結晶を比較し、特徴や違いを調べる。

【２】ビスマスについて



１、特徴

・主に鉛や銅の生成の際の副産物 （自然にも存在）

・銀白色でやわらかく、もろい

・電気・熱の伝導性は低い

２、用途

・医薬品（整腸剤など）の原料 （人体への影響がない）

・釣りの錘やガラスの材料 （鉛・カドミウムの代替）

【３】実験の流れ

Ⅰ.食塩の結晶化 ⇒水溶液中の結晶

Ⅱ.ミョウバンの結晶化 ⇒水溶液中の結晶

Ⅲ.ビスマスの結晶化 ⇒金属の結晶

（実験Ⅰ～Ⅲの理由）

・目的であるビスマス結晶と他の結晶との比較

（今回は水溶液中の結晶で比較を行う。）

・結晶化の実験のイメージ作り

【４】実験

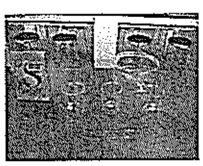
Ⅰ.食塩の結晶化

4/26	飽和水溶液作り
5/1	塩を採取
5/2	結晶化の準備
5/2～5/10	結晶化(放置)
5/10	結晶の完成

合計日数 16日

１、材料の準備

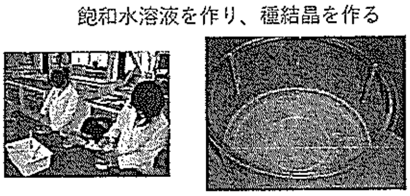
食塩
精製水
ビーカー
ガラス棒
髪の毛
糸
釣り糸
接着剤



２、飽和水溶液の準備と種結晶の結晶化

５００ｍｌビーカーを３つ用意し、それぞれのビーカーに食塩を約１００ｇ程度いれ、精製水を５００ｍｌ入れて溶かし、溶け切れなかった分も含め大きな水槽に移した。水分を蒸発させるため、窓際に放置する。

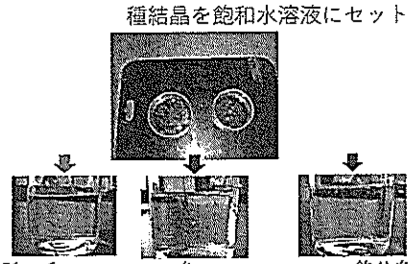
飽和水溶液を作り、種結晶を作る



３、本結晶の巨大化

できていた結晶の中で大きく、形のきれいなものを厳選し、乾燥させ、種結晶とする。比較実験のため、種結晶を３種類のひもに接着剤で接着させ、再び飽和水溶液に漬ける。

種結晶を飽和水溶液にセット



髪の毛 糸 釣り糸

４、結果

それぞれの結晶が大きくなったが、糸はついていた毛やごみが種となってしまい、新たな結晶ができてしまった。そのため結晶がほかと比べて大きくならなかった。

髪の毛と釣り糸は表面が滑らかでごみが付くことがないためか、途中に結晶ができることはなく、大きく成長した。

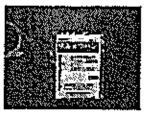
Ⅱ. ミョウバンの結晶化

5/1～5/2	飽和水溶液作り
5/10	核を採取・結晶化の準備
5/10～5/24	結晶化(放置)
5/24	結晶の完成
5/25～	結晶化の続き

合計日数　24日

1、材料の準備

- 焼きミョウバン
- 精製水
- ビーカー
- ガラス棒
- ガスバーナー
- ろうと
- ろ紙
- 割り箸
- 銅線



2、飽和水溶液の準備

水：焼きミョウバン＝５００ml ： ５０ｇの割合（過飽和にする）でビーカーに入れ、常にガラス棒でかき混ぜながらガスバーナーで沸騰させながら溶かした。途中、水が少し蒸

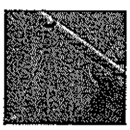
発してしまったため、水を追加しながら溶かした。完全には溶けず、白く濁っていた。

次の日、前日の液を残しておき、また同じように熱しながら溶かした。また完全には溶けず、次に、また同じように溶かすためとっておいた。

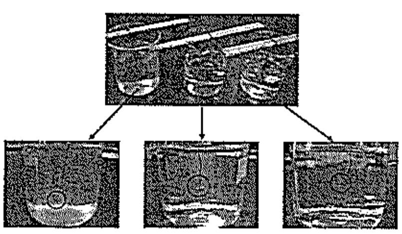
８日後、完全に溶けなかった液中に結晶が発生していた。その結晶をろ過して取り出し、大きめの結晶３つを種結晶として、熱した銅線を刺し、さらに大きい結晶を作ることにした。ろ液は、結晶を成長させるために使うこととした。

3、結晶の巨大化

飽和溶液中から、結晶をろ過して取り出し、さらに大きな結晶へ成長させる。



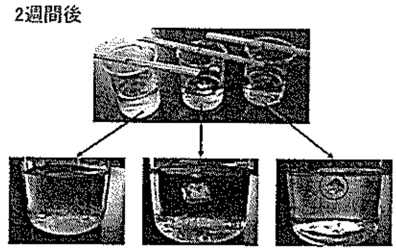
新たに水とミョウバンを３００ml ： １８ｇの割合（常温で飽和するように）で溶けるだけ溶かし、ろ過してとっておいた液と合わせ、同じ量になるよう３つのビーカーに分けた。それぞれに銅線を刺した結晶をいれて放置した。



4、結果

２週間放置したミョウバン結晶の２／３が成長した。１つは上手く成長せずに落ちてしまった。

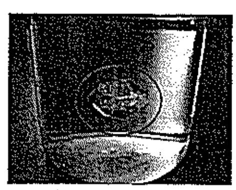
2週間後



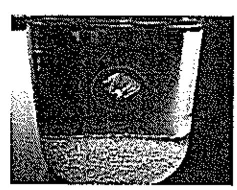
5、結晶の継続巨大化

できていた、２つの結晶をさらに大きく成長させる。

（更に１週間後）

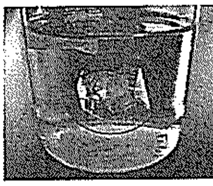
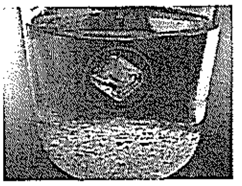


約1.5倍



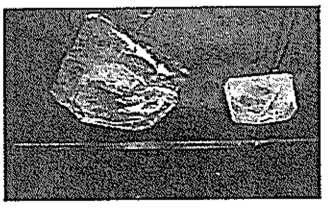
大きな変化なし

（更に２週間後）

1週間前と比べ　約1.3倍　　　約1.5倍

結果



↑6月21日　約3cm　　↑6月12日　約1.5cm

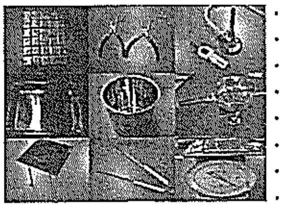
3-9

Ⅲ. ビスマスの結晶化

5/24	実験の準備
5/31	実験
6/7	実験

合計日数　3日

1、材料の準備



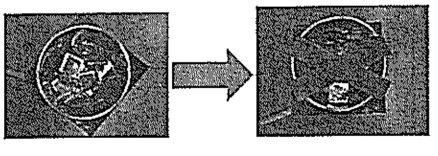
- ビスマスチップ　1.5ｋｇ×２
- やっとこ
- ガスバーナー
- バット
- ステンレス容器
- ステンレス鍋
- 火ばさみ
- 三脚、金網
- とんかち

3-10

2、結晶づくり　～１～

＊結晶皿作り法（ステンレス容器使用）

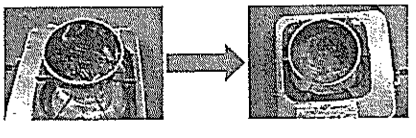
①ビスマスチップを溶かす(１)



ガスバーナーで加熱。

１つ目は、結晶皿作りの方法で実験。ガスバーナーで加熱したがうまく熱が伝わらず溶けなかった。ガスコンロへ変更。ガスバーナーに比べ、熱が全体に速く伝わるためすぐに溶けた。

ビスマスチップを溶かす（２）

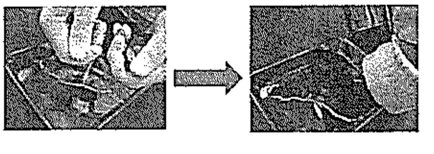


3-11

②表面の膜を取る

完全に溶けたら火を止める。表面に酸化膜ができるため除去する。

③取り出す

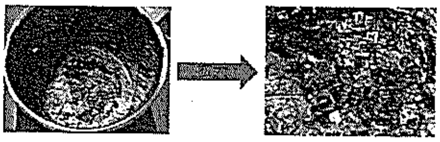


周りが固まってきたら、やっとこでステンレス容器を掴み、上澄み液をバットに流す。

3-12

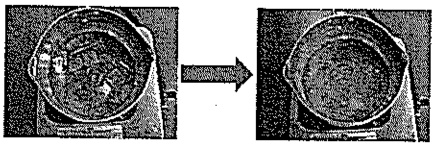
④完成

固まらなかった液体をバットの出した後の様子。



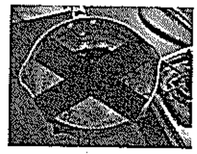
2、結晶づくり　～2～

＊結晶取り出し法（ステンレス鍋使用）
①ビスマスチップを溶かす



2つ目は、結晶取り出しの方法で実験。ステンレス容器からステンレス鍋に変更する。

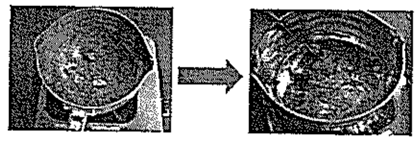
②冷却



結晶ができず、失敗。

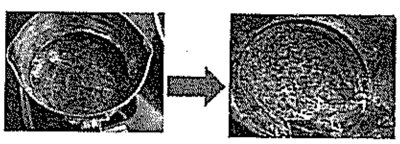
膜を取る予定だったが、確認不足で膜を取らなかった。

＊再挑戦　①再び溶かし、膜を取る



ビスマス金属は何度でも溶かしたり、結晶化したりできるため、失敗したものを使って、先程と同様に再度挑戦。

②冷却



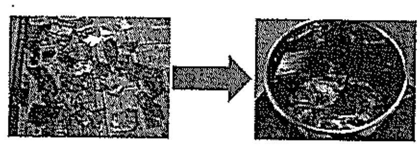
膜は取ったが結晶化せず、バットへ流した。

③完成（失敗）

バット内での冷却後、結晶化せず。

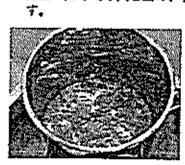
原因は？

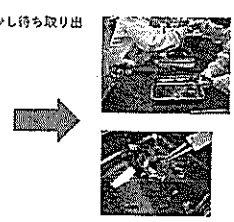
失敗の原因として、ステンレス鍋ではあるが、表面に何らかのコーティングなどが施され、別の金属が混じり込んでしまったのではないかと考えた。



「結晶皿つくり法」で取り出した液体が固まったものを再び結晶化させる。（ステンレス容器使用）

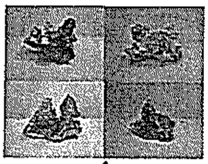
完全に溶けたら火を止め、少し待ち取り出す。



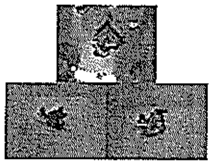


この方法は、急がないと固まって取り出せなくなってしまうため、次々に取り出した。

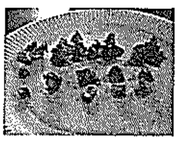
結果



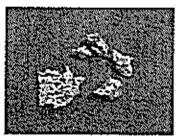
＊結晶皿作り



＊結晶取り出し法で再挑戦したもの



完成したもの全部



失敗したもの

【5】まとめ

	塩	ミョウバン	ビスマス結晶
結晶化	水溶液中	水溶液中	金属を溶かし 再び固めた
結晶の特徴	正六面体 透明 小さい	正八面体 透明 比較的大きい 水に溶けにくい	骸晶 多彩 大小様々 金属光沢

◎水溶液中の結晶はいくつか共通点がみられた。

◎それぞれの結晶独特の特徴がみられた。

【6】今後の課題

塩、ミョウバン以外の水溶液中の結晶、またビスマス結晶以外の金属結晶などの結晶から、結晶化の実験ができるものについて実験を行い、違いや特徴、共通点など調べていきたい。

● 課題研究発表テーマ

暗号の歴史と解読

4班
伊藤朱里 菅野恭平 佐藤幸大 丹治藤也
橋本雷太 半沢徹也 松本竜馬

暗号についてどれほど知っていますか？

4
班

1,パスワードについて
2,代表的な暗号
・シーザー暗号
・単一換字暗号
・二銭銅貨
3,RSA暗号
4,未来の暗号
・量子暗号
5,終わりに

パスワードについて

パスワードの最大解読時間測定

ハードウェア PC1台 (CPU:Intel Core i7,システムメモリー:8GB,GPU:GeForce GTX 680)

【暗号強度別】

1秒間あたりに解析できる回数（上記ハードウェア構成PC1台での数値）

解析ファイル種類	ZIP	ZIP（２５６bitAES）	DOC	DOCX
解析回数（1秒間）	約４５億回	約１０５万回	約１２００万回	約２３０００回

桁数	4桁	6桁	8桁	10桁
英大小文字+数字（62字）				
ZIP	1秒以下	13秒	13.5時間	6年
ZIP(256bitAES)	14秒	15時間	7年	26千年
DOC	1秒以下	1時間20分	211日	2,218年
DOCX	10分42秒	29日	301年	1,158千年
英大小文字+数字+記号（93字）				
ZIP	1秒以下	2分24秒	14日	341年
ZIP(256bitAES)	1分11秒	7日	169年	1,462千年
DOC	6秒	15時間	15年	128千年
DOCX	55分	326日	7,800年	66,726千年

代表的な暗号

シーザー暗号について

・通常
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

・暗号化
XYZABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVW

送信側	暗号化	受信側
I love you	⇨	F ilsb vlr

弱点

単一換字暗号

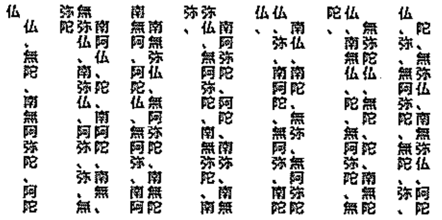
・シーザー暗号の弱点を改善し作られた暗号です。

・通常
ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

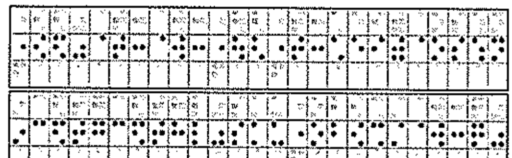
・暗号化
QPWOEIRUTYALSKDJFHGMZNXBCV

二銭銅貨

江戸川乱歩の暗号文



これは江戸川乱歩の「二銭銅貨」に出てくる暗号です。

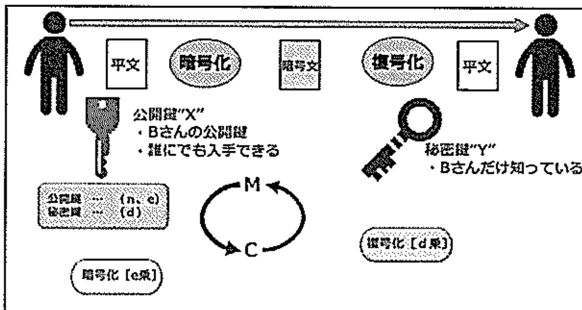


ゴケンチョーショージキドーカラオモチヤノサツヲウケトレウケトリニンノナハダイコクヤショーテン

⬇

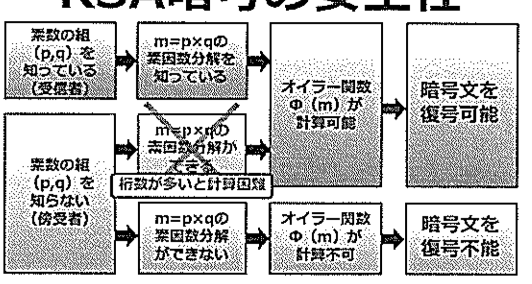
五軒町の正直堂からおもちゃの紙幣を受け取れ、受取人の名は大黒屋商店

RSA暗号



M：平文　C=Me mod n:暗号文

RSA暗号の安全性



556974 / 2 = 278487	278487 / 2 割り切れない
278487 / 3 = 92829	92829 / 3 = 30943
30943 / 3 割り切れない	30943 / 5 割り切れない
30943 / 7 割り切れない	30943 / 11 = 2813
2813 / 11 割り切れない	2813 / 13 割り切れない
2813 / 17 割り切れない	2813 / 19 割り切れない
2813 / 23 割り切れない	2813 / 29 = 97
97 / 29 割り切れない	

…

…

97 / 97 = 1

練習問題.

2つの素数を $p = 5, q = 7$ とする. このとき $pq = 35$. 自然数 s は $(p-1)(q-1) = 4 \cdot 6 = 24$ と互いに素なものを取ればよかったので, 例えば $s = 5$ を取ろう. 自然数 t は $st - 1$ が
$(p-1)(q-1) = 24$ の倍数であるものを取ればよかったので, 例えば $t = 5$ を取ろう. このとき, 公
開鍵は $pq = 35$ と $s = 5$, 秘密鍵は $t = 5$ となる. 今,

(空白)きにけおのしかるな
0　1 2 3 4 5 6 7 8 9

とひらがなと数字の対応をつけるとする.

このとき, 「にし」の暗号文を作成してみよう. まず, 「にし」を数字列に置き換えると 26 になる. さらに,

26^s = 26^5 = 11881376

11881376 を $pq = 35$ で割った余りは

11881376 = 35 × 339467 + 31

より 31. よって, 暗号文は 31.

次に, 暗号文 31 を復号してみよう.

31^t = 31^5 = 28629151

これを $pq = 35$ で割ってみると

28629151 = 35 × 817975 + 26

よって, 元の数字列は 26. つまり, 元の文は「にし」であることが分かる. 確かに, この例では正しく復号されている.

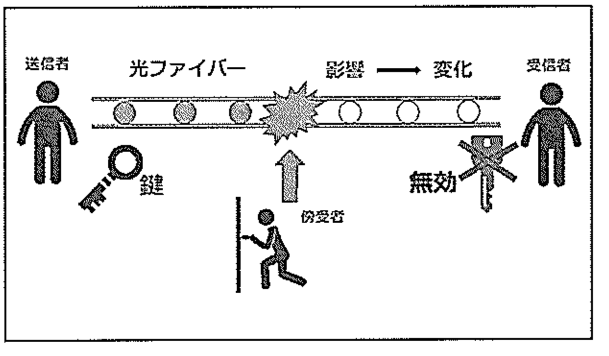
練習問題と同じ暗号, つまり
公開鍵は $pq = 35$ と $s = 5$, 秘密鍵は $t = 5$
で, コード表も同じ

(空白)やかわはあずさまた
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

を使用するとき, 次の問に答えよ.

(1) 「やま」を数字列に置き換えよ.
(2) （1）の答を暗号化せよ.
(3) （2）の答を復号し, 「やま」に戻ることを確認せよ.
(4) 暗号文 18 を復号せよ.

量子暗号



量子暗号の弱点

・量子暗号の弱点は妨害のされやすさである。
「盗聴すると鍵がリセットされる」という特性を利用して何度もリセットさせられると新しい鍵を作り送り続けなくてはいけなくなる。

Number Place
～数独～

メンバー

◎二瓶大輝　　○吉田奎　　・佐藤喜朗

・安田悠真　　・瓶子瞳　　・仲島優衣

5班

5
班

目次

- 4×4 の数独
- アインシュタイン問題
- 守備割当て問題

	6	1			7			3
	9	2			3			
		8	5	3				
						5		4
5					8			
	4							1
			1	6		8		
6								

４×４まとめ

問　４×４のマスに、１～４の数を入れ、たて、よこ、ななめの和が
すべて同じになるようにせよ。

解答

①

2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2
1	2	3	4

②

3	4	1	2
1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	2	1

③

3	1	2	4
2	4	3	1
4	2	1	3
1	3	4	2

④

2	1	4	3
3	4	1	2
1	2	3	4
4	3	2	1

⑤

3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1
1	2	3	4

⑥

2	4	1	3
3	1	4	2
4	2	3	1
1	3	2	4

解説

2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2
1	2	3	4

●＋でくぎられた大きい４マスを上から順に①～④とする。

2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2
1	2	3	4

●＋でくぎられた小さいマスに１～４の数字が入る。
●①と②を見たとき①の上段が①の下段に来ている。

また、③と④も同様。

●①と③を見たとき①の上段の逆が③の下段にきていて、③上段の逆が①の下段にきている。
②と④も同様。

2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2
1	2	3	4

2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2
1	2	3	4

●①と④を見たとき①の上段の逆が④の上段にきて、①の下段の逆が④の下段にきている。
②と③も同様。

2	1	4	3
3	4	1	2
1	2	3	4
4	3	2	1

2	1	4	3
4	3	2	1
3	4	1	2
1	2	3	4

④を例に
●＋でくぎられた大きい４マスを上から順に①～④
●＋でくぎられた小さいマスに１～４の数字がはいる。
●①と②を見たとき①の上段の逆が①の下段にきている
③と④も同様。

2	1	4	3
3	4	1	2
1	2	3	4
4	3	2	1

2	1	4	3
3	4	1	2
1	2	3	4
4	3	2	1

●①と③を見たとき①の上段の逆が③の上段にきていて、①の下段の逆が③の下段にきている。
②、③も同様。
●①と④を見たとき①の上段が④の下段にきていて、④のの上段が①の下段にきている
また、②、③も同様。

2	1	4	3
3	4	1	2
1	2	3	4
4	3	2	1

2	1	4	3
3	4	1	2
1	2	3	4
4	3	2	1

３×３まとめ

３×３のマスに１～３の数を入れて、縦、横、片側の斜めの和がすべて同じようにせよ。

解答例

①

3	1	2
1	2	3
2	3	1

②

1	3	2
3	2	1
2	1	3

③

2	3	1
1	2	3
3	1	2

④

2	1	3
3	2	1
1	3	2

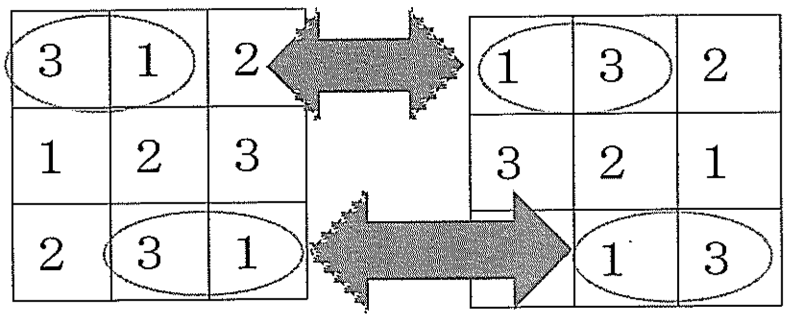
① ～④のすべてにおいて片側の斜めは同じ数字が並ぶ。

また、縦、横、斜めの和はそれぞれ６になる。

3	1	2
1	2	3
2	3	1

①を例に
○で囲んでいる所は同じ数字が入る。
また、②～④も同様。

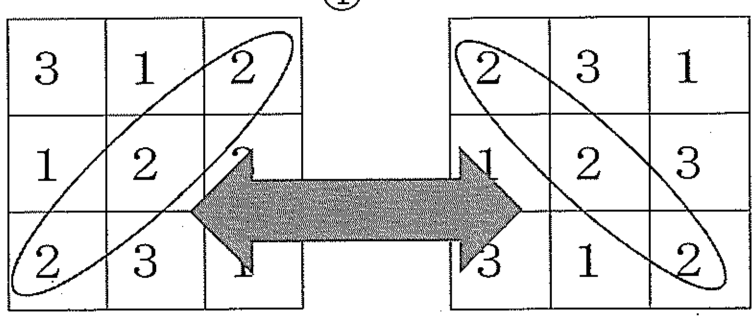
①　　　　　　　　②



① の○で囲んでいる数字は②のように逆にしてもよい。

また、③、④も同様。

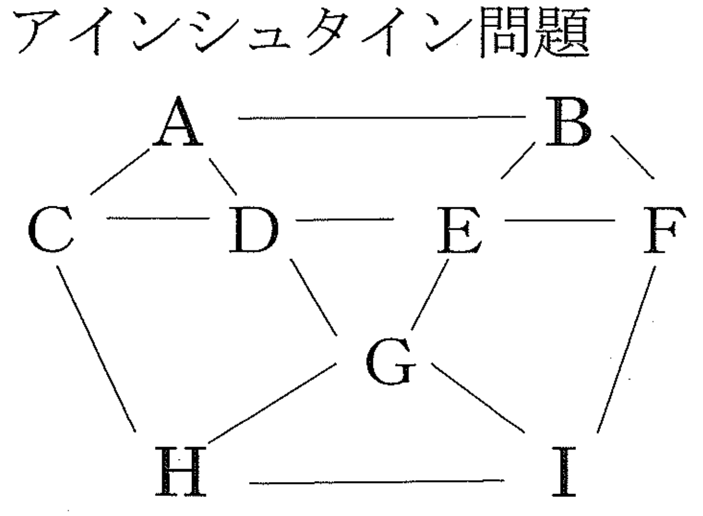
③　　　　　　　　④



① の○で囲んでいる向きは逆にしてもよい。
また、②、④も同様。

アインシュタイン問題

アインシュタインとは、米国の理論物理学者で色々な研究をしています。
ブラウン運動〔分子、原子、コロイド粒子などが液体中で動く運動。不規則な熱運動。〕などがある。ノーベル物理学賞を受賞していて、世界的に有名な偉人。



この図形には、七つの三角形が隠れています。
△ACD、△BEF、△GIH、△ABG、△CEH、△DFI、△DEG
その七つの三角形のそれぞれの三つの頂点の和が全て同じになるように 1~9 の数を入れてください。またその入れ方は何通りあるか求めてください。

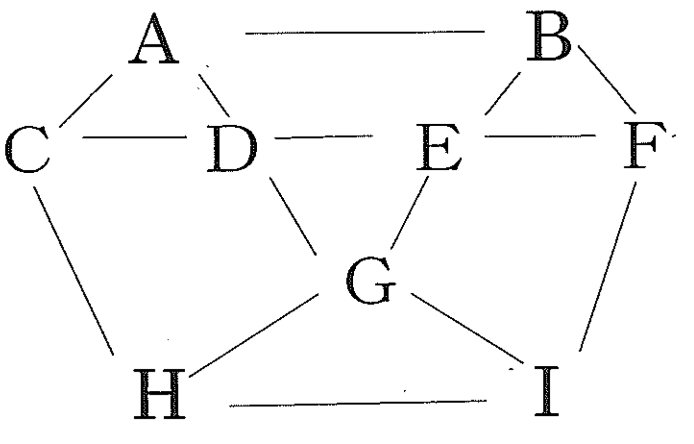
解法、必勝法

頂点を共有しない△ACD、△BEF、△GHIの三つに注目してください。
1~9 を全て足すと 45 で、この三角形の数 3 で割ると 15。
これは△ACDの頂点の数の和が 15 であることをあらわす。
1~9 の数を用いて、和が 15 になるのは、1+5+9、1+6+8、2+4+9
2+5+8、2+6+7、3+4+8、3+5+7、4+5+6 の 8 通りしかない。
この 8 通りを 1~9 の中で数字をかぶらないようにグループ化すると
① と②になる。

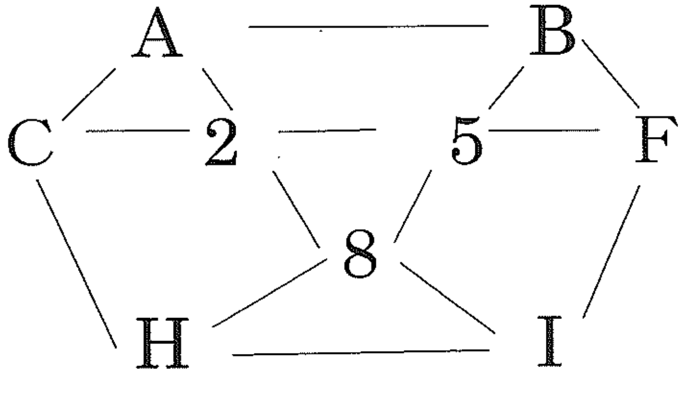
① 1+5+9　2+6+7　3+4+8

② 1+6+8　2+4+9　3+5+7

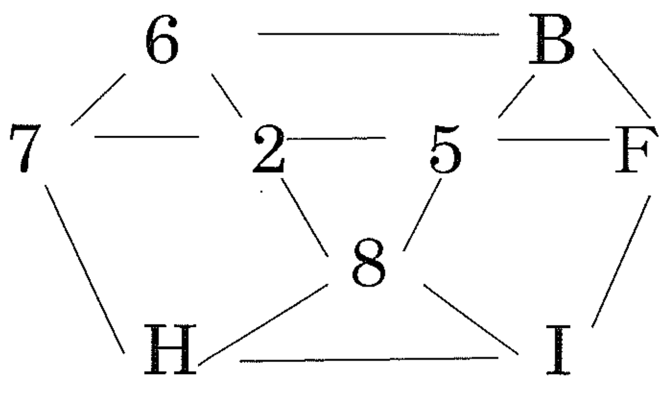
8 通りのうち、使っていないのが、2+5+8、4+5+6。
この二つが真ん中の△CDGに入れます。



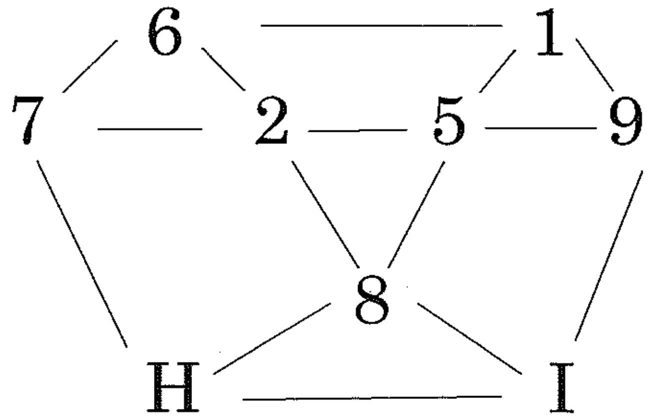
いまから説明するのは全ての答えの１通りです。
この樹形図には①のグループを△ＡＣＤには 2+7+6、△ＢＥＦには 1+5+9
△ＧＨＩには 3+4+8 を入れます。
また、中心の△ＤＥＧには、2+5+8 を入れます、Ｄに 2、Ｅに 5、Ｇに 8 を入れます。



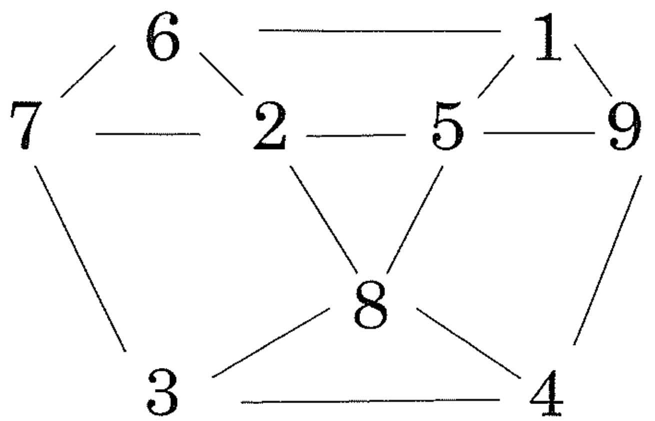
△ＡＢ8 に注目してください、Ａに７を入れてしまうとＡ＋8＋Ｂ＝7+8＝15
になってしまいＢには何も入らなくなってしまうのでＡには 6 を入れます。
そして、Ｃには７を入れると△ＡＣ2 は成り立ちます。



次に△B5Fに注目してください、Bに9を入れてしまうと△68Bが成り立たなくなってしまうのでBには1が入りFには9が入ります。
これで、△BEFは成り立ちます。

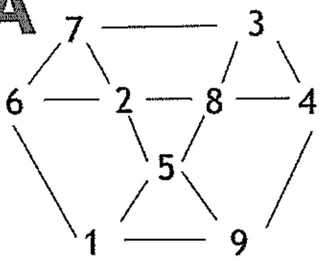


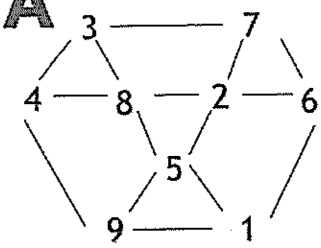
次に、△29Iを成り立たせるためにIには4を入れます。
そして、残ったHには3が入ります、これで七つの三角形全てが成り立ちます

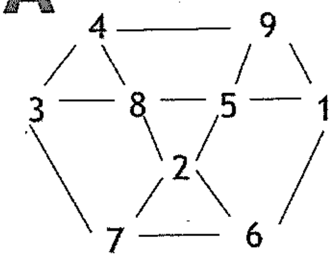


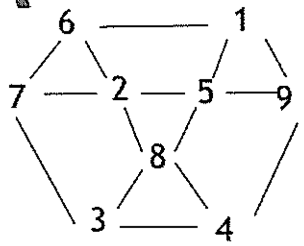
解答

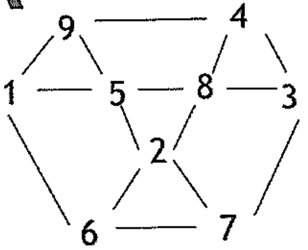
① のパターンで真ん中の三角形が２５８の組み合わせをＡとまとめた。

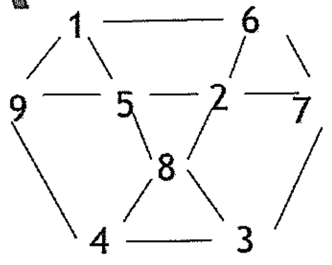
A


A


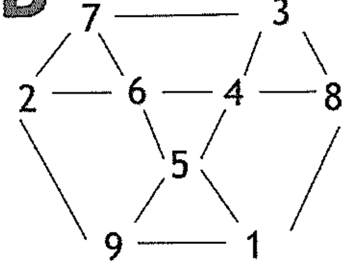
A


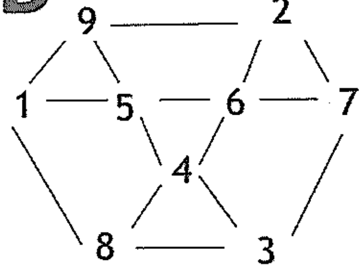
A


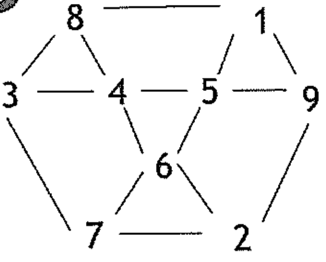
A


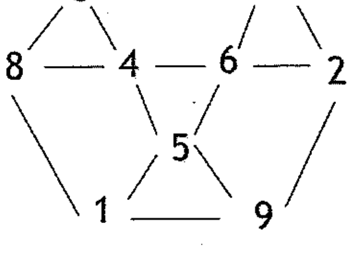
A


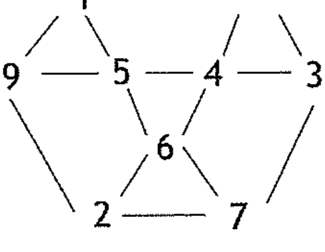
① のパターンで真ん中の三角形が４５６の組み合わせをＢとまとめた。

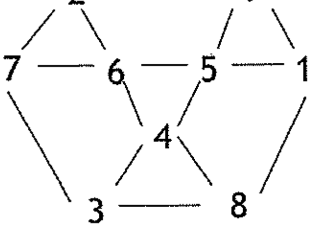
B


B


B


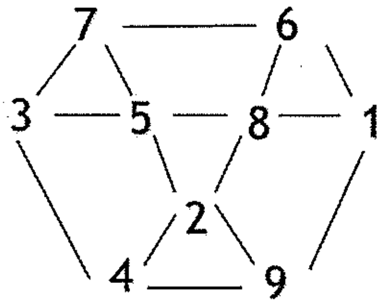
B


B


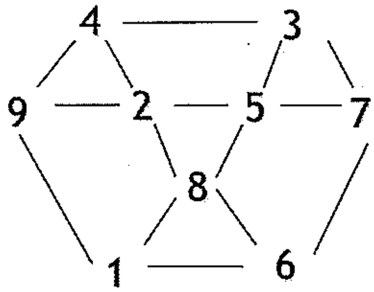
B


② のパターンで真ん中の三角形が２５８の組み合わせをＣとまとめた。

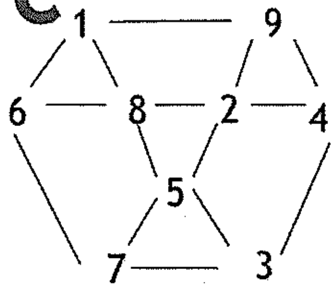
C



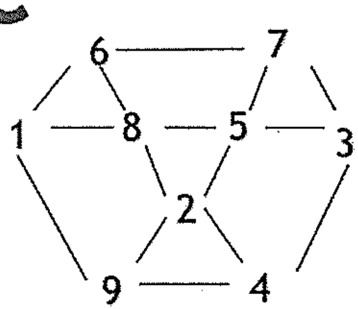
C



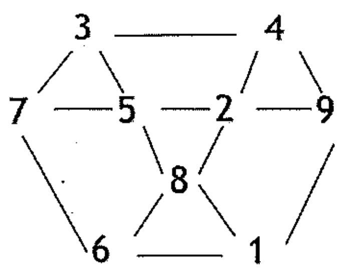
C



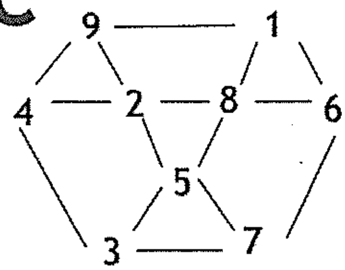
C



C

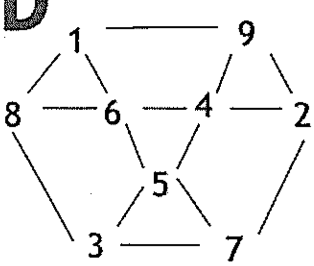


C

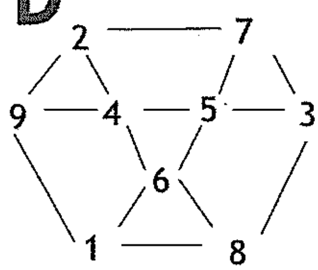


① のパターンで真ん中の三角形が４５６の組み合わせをＤとまとめた。

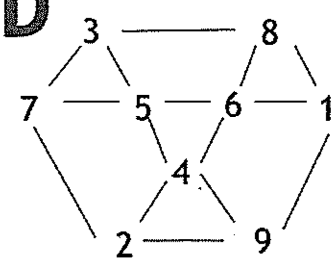
D



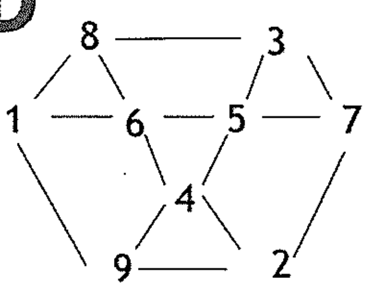
D



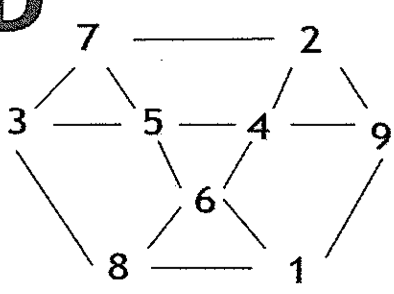
D



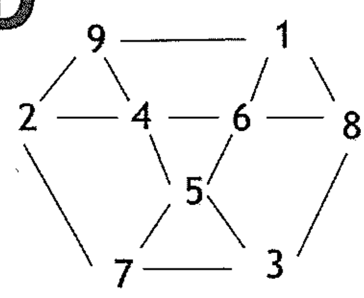
D



D



D



問題　守備割当問題

A,B,C,D,E の選手がいる。次の能力のとき，監督はどこを守らせるか。

	1sh	2nd	3rd	SS	外	
	34	32	32	28	35	
A	6	5	6	5	6	＝28
B	8	7	6	8	7	＝36
C	4	5	4	4	5	＝22
D	6	7	6	4	7	＝30
E	10	8	10	7	10	＝45

＊１が能力高い、１０は低い。また、縦を列、横を行とする

〈自分たちの考え３種〉

N の考え：外野はあまり能力高い人がいないので総合的に低い E に入ってもらい残りの各ポジション高い人が入ると C,A,B,D,E　=29

K の考え：総合的に能力が低い E をできるだけ高い SS に、次能力の低い B を 3rd にする。残りも合計してなるべく少ないところに入れると　D,A,B,E,C　=29

Y の考え：C を能力が高い 1st においたと仮定し、残りを合計が少なくなるように入れると C,E,B,D,A　=28

〈解答・解説〉

① 行で見て A,B,C,D,E の一番いい能力が知りたいので各列一番小さい数だけ引く

	1st	2nd	3rd	SS	外
A	6	5	6	5	6
B	8	7	6	8	7
C	4	5	4	4	5
D	6	7	6	4	7
E	10	8	10	7	10

		1st	2nd	3rd	SS	外
$\xrightarrow{-5}$	A	1	0.	1	0.	1
$\xrightarrow{-6}$	B	2	1	0	2	1.
$\xrightarrow{-4}$	C	0	1	0	0	1
$\xrightarrow{-4}$	D	2	3	2	0	3
$\xrightarrow{-7}$	E	3	1	3	0	3

② 引いたものを列で見て 0 がないところ−1 して 0 を作る。

	1st	2nd	3rd	SS	外
A	1	0	1	0	1
B	2	1	0	2	1
C	0	1	0	0	1
D	2	3	2	0	3
E	3	1	3	0	3

→

	1st	2nd	3rd	SS	外
A	1	0	1	0	0
B	2	1	0	2	0
C	0	1	0	0	0
D	2	3	2	0	2
E	3	1	3	0	2

③ 行で見て 0 が複数ない行を−1 する

	1st	2nd	3rd	SS	外
A	1	0	1	0	0
B	2	1	0	2	0
C	0	1	0	0	0
D	2	3	2	0	2
E	3	1	3	0	2

→

	1st	2nd	3rd	SS	外
A	1	0	1	0	0
B	2	1	0	2	0
C	0	1	0	0	0
D	1	2	1	-1	1
E	2	0	2	-1	1

③ −1 のある列に＋1 する

	1st	2nd	3rd	SS	外
A	1	0	1	0	0
B	2	1	0	2	0
C	0	1	0	0	0
D	1	2	1	-1	1
E	2	0	2	-1	1

→

	1st	2nd	3rd	SS	外
A	1	0	1	1	0
B	2	1	0	3	0
C	0	1	0	1	0
D	1	2	1	0	1
E	2	0	2	0	1

すべてが 0 になっているところから、D が SS、E が 2nd、A が外、B が 3rd、C が 1st になる。

	1st	2nd	3rd	SS	外
A	1	0	1	1	0
B	2	1	0	3	0
C	0	1	0	1	0
D	1	2	1	0	1
E	2	0	2	0	1

Q.横、縦の行や列で同じ数を引いて良いのか？
→縦は、同じポジション同士での比較をし、0～10 の中で差をみているので、可能。
横は、同じ人の能力で、最小値に合わせて揃えているため、可能。
すべての値がポジションや個人の能力間での比較をし、0 を基準に合わせているため、行、列で 0 に近づくよう操作することで最適なポジションが求まる。

ここで社会現象に置き換えて問題を考えてみた。

問題

商品 ABCD がある。各駅で売れ残りの数を調査した。
次の値のとき、どの駅でそれぞれ売れば効率的か？

	A 駅	B 駅	C 駅	D 駅	E 駅	
A	600	500	600	500	600	=2800
B	800	700	600	800	700	=3600
C	400	500	400	400	500	=2200
D	600	700	600	400	700	=3000
E	1000	800	1000	700	1000	=4500

① 行で見て A,B,C,D,E の一番いい能力が知りたいので各列一番小さい数だけ引く

	A 駅	B 駅	C 駅	D 駅	E 駅
A	600	500	600	500	600
B	800	700	600	800	700
C	400	500	400	400	500
D	600	700	600	400	700
E	1000	800	1000	700	1000

－500 → －600 → －400 → －400 → －700 →

	A 駅	B 駅	C 駅	D 駅	E 駅
A	100	0.	100	0.	100
B	200	100	0	200	100
C	0	100	0	0	100
D	200	300	200	0	300
E	300	100	300	0	300

② 引いたものを列で見て 0 がないところ－100 して 0 を作る

	A 駅	B 駅	C 駅	D 駅	E 駅
A	100	0	100	0	100
B	200	100	0	200	100
C	0	100	0	0	100
D	200	300	200	0	300
E	300	100	300	0	300

→

	A 駅	B 駅	C 駅	D 駅	E 駅
A	100	0	100	0	**0**
B	200	100	0	200	**0**
C	0	100	0	0	**0**
D	200	300	200	0	**200**
E	300	100	300	0	**200**

③ 行で見て 0 が複数ない行を－100 する

	A 駅	B 駅	C 駅	D 駅	E 駅
A	100	0	100	0	0
B	200	100	0	200	0
C	0	100	0	0	0
D	200	300	200	0	200
E	300	100	300	0	200

→

	A 駅	B 駅	C 駅	D 駅	E 駅
A	100	0	100	0	0
B	200	100	0	200	0
C	0	100	0	0	0
D	**100**	**200**	**100**	**-100**	**100**
E	**200**	**0**	**200**	**-100**	**100**

④ －100 のある列に＋100 する

	A 駅	B 駅	C 駅	D 駅	E 駅
A	100	0	100	0	0
B	200	100	0	200	0
C	0	100	0	0	0
D	100	200	100	-100	100
E	200	0	200	-100	100

→

	A 駅	B 駅	C 駅	D 駅	E 駅
A	100	0	100	**100**	0
B	200	100	0	**300**	0
C	0	100	0	**100**	0
D	100	200	100	**0**	100
E	200	0	200	**0**	100

よって、すべてが 0 になっているところから、A 駅で C、B 駅で E、C 駅で B、D 駅で D、E 駅で A を売ると効率的となる。

感想

私たち５班は、数学を心から楽しみながら解くことができました！！数独がさまざまなことに活用できること，
活用の仕方もたくさんあること，自分たちでも協力すればどうにかここまで調べて，考え，まとめられることがこの研究を通して実感できました。これからも何か機会があったら数独を解いていきたいです。

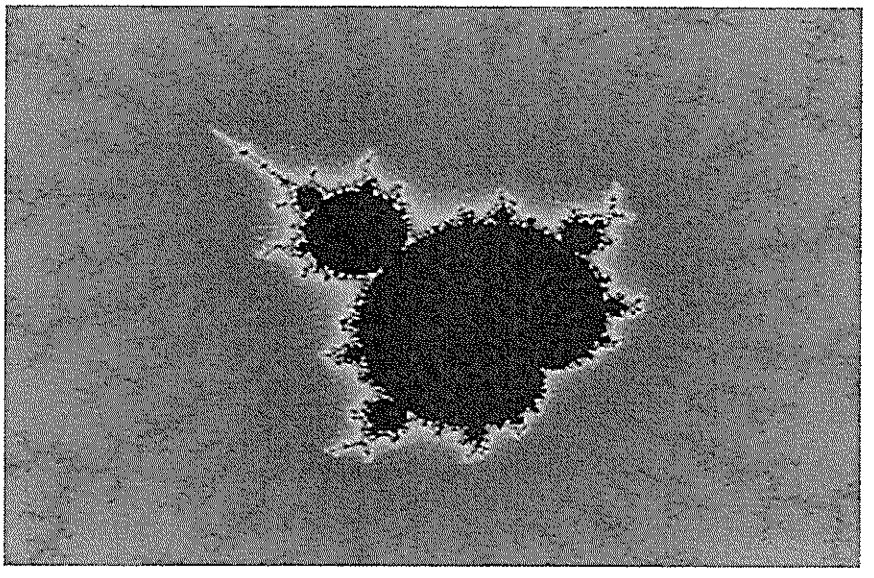
謝辞

福島大学共生システム理工学類

笠井　博則　先生

中川　和重　先生

ご指導ありがとうございました。



「フラクタルと応用」

6班

◎須貝拓音　○古山雄真

佐藤駿希　　佐藤　翔

Ⅰ.研究動機

研究の題材を探しているときにロマネスコブロッコリーという野菜を見つけ、その野菜にフラクタルが現れているということを知り、面白そうだと興味を持ち、今回の課題研究の題材にしようと思った。

Ⅱ.フラクタルとは

フラクタルの特徴としては直感的には理解できるものの、数学的に厳密に定義するのは非常に難しく、マンデルブロ氏はフラクタルを、「ハウスドルフ次元が位相次元を厳密に上回るような集合」と定義した。

フラクタルを定義する際の問題には次のようなものがある。

① 「不規則すぎること」に正確な意味が存在しない。

② 「次元」の定義が唯一でない。

③ 物体が自己相似である方法がいくつも存在する。

④ 全てのフラクタルが再帰的に定義されるとは限らない。

自己相似とは、何らかの意味で全体と部分とが、相似である。図形においては、ある図形の断片を取ってきたとき、それより小さな断片の形状と図形全体の形状とが相似である場合を指す。

Ⅲ.マンデルブロ集合

マンデルブロ集合の定義は、

次の漸化式

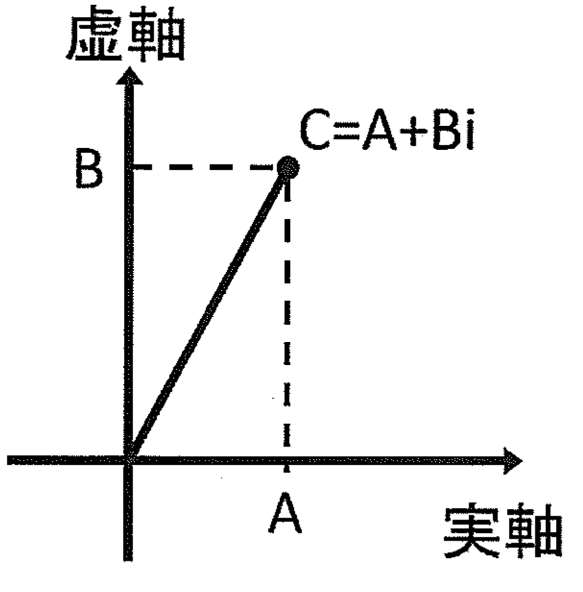
$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n^2 + c \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

で定義される複素数列$\{Z_n\}n\in N\cup\{0\}$が $n\to\infty$ の極限で無限大に発散しないという条件を満たす複素数 c 全体が作る集合がマンデルブロ集合である。

というものがあるが、分かりにくいため、もう少し噛み砕いて説明しようと思う。

①複素平面

複素平面とは、X を実軸、Y を虚軸として、座標平面上に表したものである。複素数を C として、実部を A、虚部を B としたときに下の座標平面のように表せる。



②マンデルブロ集合の漸化式について

この章の始めに書いた通り

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n^2 + c \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

という式になる。つまり、この式は計算を繰り返していくと、

$Z_1=Z_0^2+C=C$

$Z_2=Z_1^2+C=C^2+C$

$Z_3=Z_2^2+C=(C^2+C)^2+C$

$=C^4+2C^3+C^2+C$

となっていき、Cが延々と続く式となっていくことが分かる。

例としてC=1＋iを書いてみましょう。

$Z_0=0$

$Z_1=C=1+i$

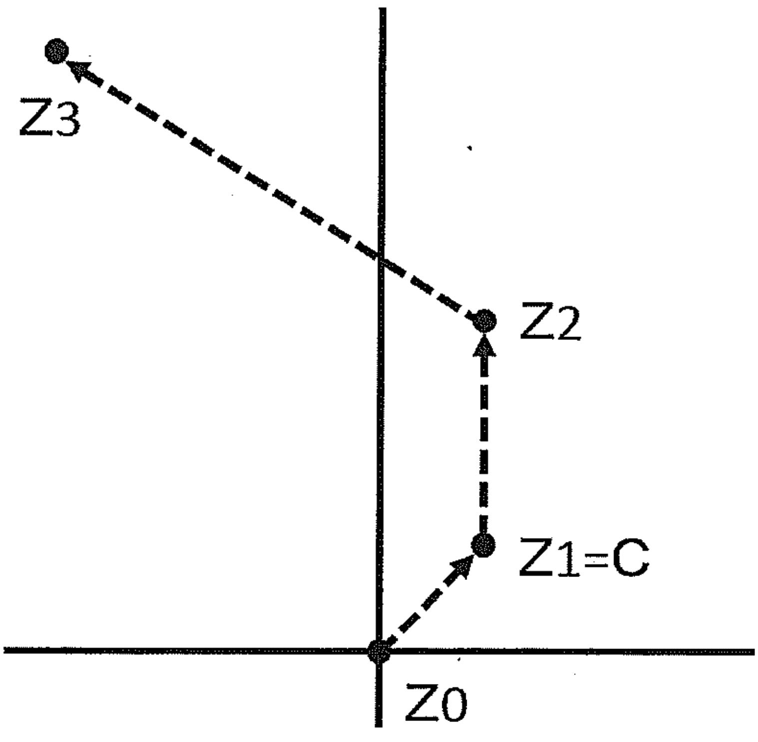
$Z_2=Z_1+C=(1+i)^2+(1+i)$

$=1+3i$

$Z_3=Z_2{}^2+C=(1+3i)^2+(1+i)$

$=-7+7i$

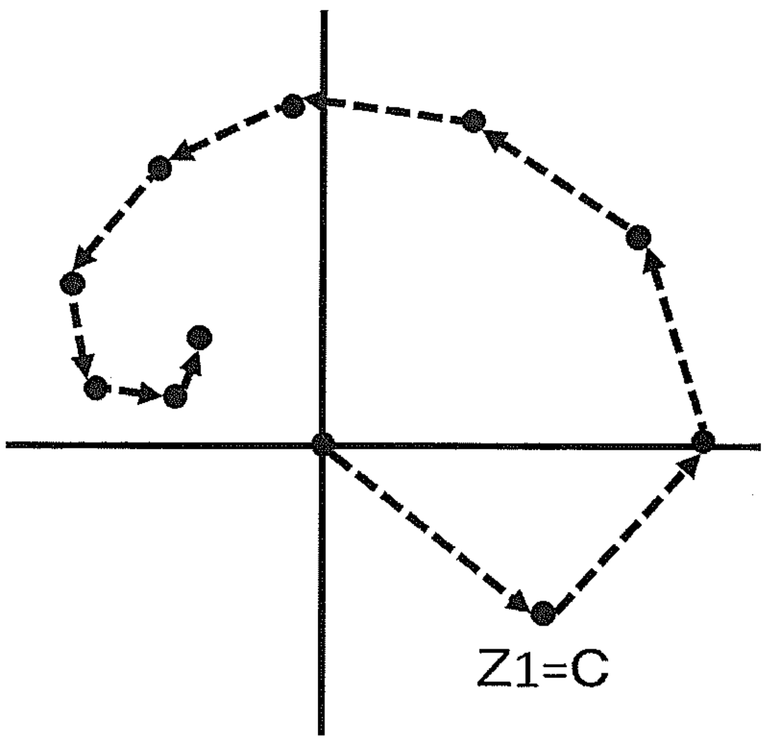
となり、次ページのグラフが複素平面上に表したものになる。



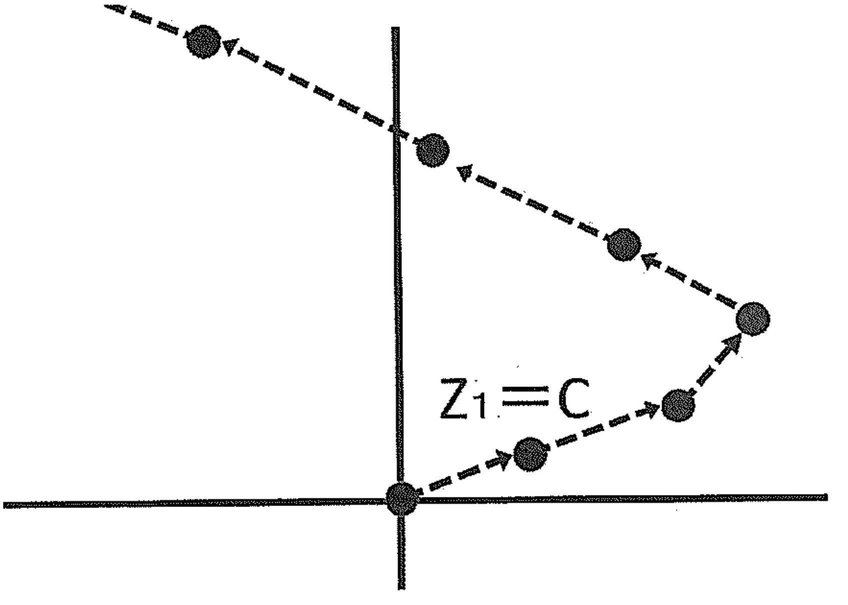
③点の動きのパターン

点の動きのパターンは２通りある。

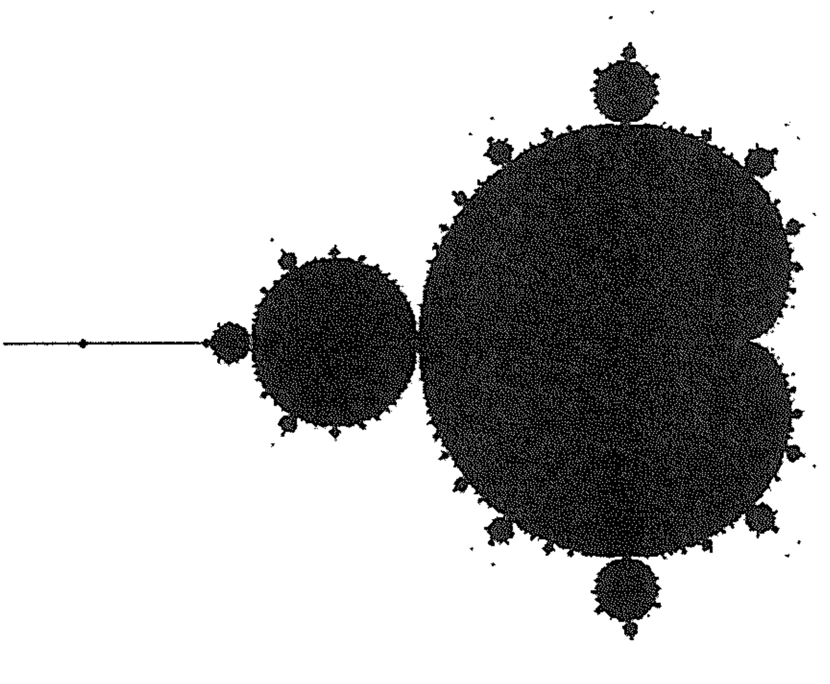
１．　一定の値に収束するケース



2. 無 限 遠 に 発 散 す る ケ ー ス



この２つのパターンに分け、収束する点だけを取り出したものが下のようなマンデルブロ集合になる。



Ⅳ.手作りマンデルブロ

EXCEL を使って C=a+bi について a や b にさまざまな値を代入して、Z_1～Z_{100} まで

IMABS(IMSUM(Z_n^2,COMPLEX(a,b)))

を使って計算をし、それらの計算結果を

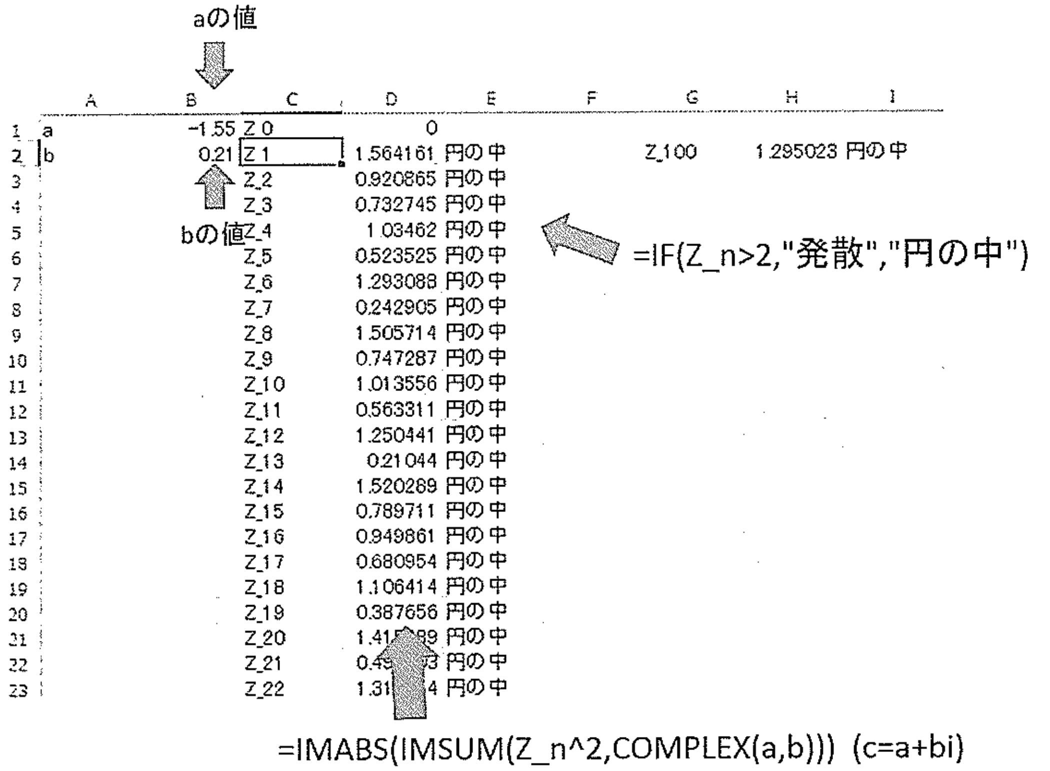
IF(Z_n＞２,"発散"、"円の中")で収束、発散の判別をした。

IMABS 関数とは、()の中の数字または数式の絶対値を出してくれるものである。

次の IMSUM 関数は()の中の２つ以上の数字、数式の複素数の和で出してくれるものである。

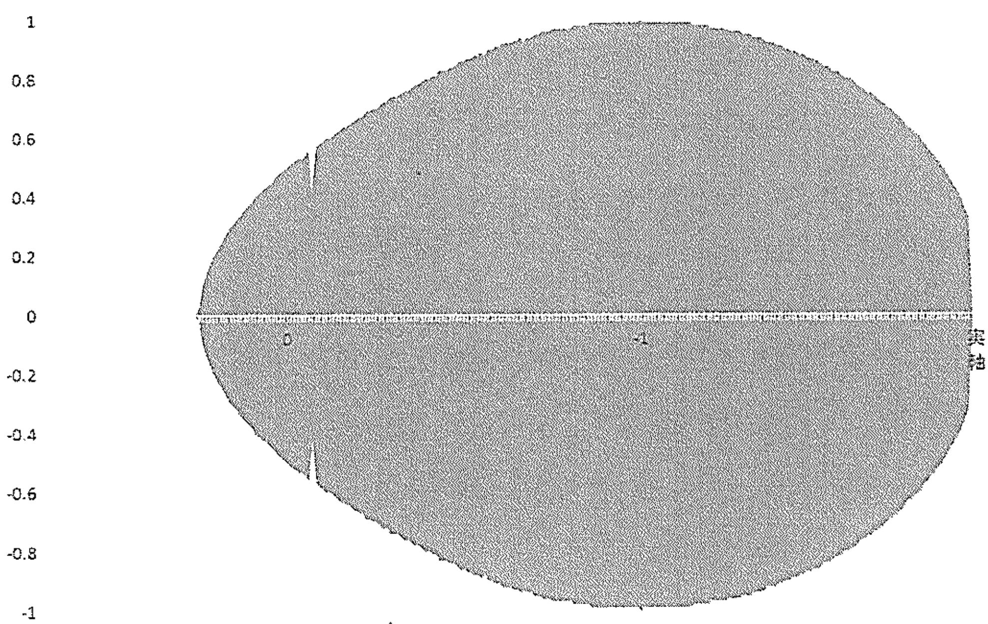
次の COMPLEX 関数は()の中の２つの数字、数式を複素数に変えてくれるものである。

最後の IF 関数はあるものを満たしているか満たしていないか判別してそれを受けてとあることを行うものである。今回は Z_n が２より大きいを満たしていれば「発散」と、満たしていなければ「円の中」と表示するようにした。その数値計算をしているときの画面が次ページ始めの画像である。



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	a	-1.55	Z_0	0					
2	b	0.21	Z_1	1.564161	円の中		Z_100	1.295023	円の中
3			Z_2	0.920865	円の中				
4			Z_3	0.732745	円の中				
5			Z_4	1.03462	円の中				
6			Z_5	0.523525	円の中				
7			Z_6	1.293088	円の中				
8			Z_7	0.242905	円の中				
9			Z_8	1.505714	円の中				
10			Z_9	0.747287	円の中				
11			Z_10	1.013556	円の中				
12			Z_11	0.563311	円の中				
13			Z_12	1.250441	円の中				
14			Z_13	0.21044	円の中				
15			Z_14	1.520289	円の中				
16			Z_15	0.789711	円の中				
17			Z_16	0.949861	円の中				
18			Z_17	0.680954	円の中				
19			Z_18	1.106414	円の中				
20			Z_19	0.387656	円の中				
21			Z_20	1.41[illegible]89	円の中				
22			Z_21	0.4[illegible]3	円の中				
23			Z_22	1.31[illegible]4	円の中				

そして計算した数字を用いて座標平面上に表してみたものが次の画像である。



マンデルブロ集合とは似ても似つかないことが分かる。

Ⅴ.実験のまとめ

なぜ我々はマンデルブロ集合を上手く表せなかったのだろうか。その理由が数値計算した際の数式に不備があったためだ。ここは違いを分かりやすくするために計算してみよう。

a	1	$\lvert Z_0 \rvert$	0			
b	1	$\lvert Z_1 \rvert$	1.414214	円の中		
		$\lvert Z_2 \rvert$	3.162278	発散		
		$\lvert Z_3 \rvert$	11.04536	発散		
		$\lvert Z_4 \rvert$	123.0041	発散		
		$\lvert Z_5 \rvert$	15131	発散		
a	1	Z_0	0			
b	1	Z_1	1+i	⇒	1.414214	発散
		Z_2	1+3i	⇒	3.162278	発散
		Z_3	-7+7i	⇒	9.899495	発散
		Z_4	1+99i	⇒	99.00505	発散

上が今までの数式を使った式で下が本来なるべき式である。数字が違うことが見てとれるだろう。

下の式はⅢ章②で説明したものを絶対値化したもの(矢印後のもの)なので説明は省略させていただく。

上の式で問題がある点として

IMABS(IMSUM(Z_n^2,COMPLEX(a,b)))

と言う式だけで計算を行おうとすると代入する式が絶対値化したものになってしまうということだ。

今回の実験でマンデルブロ集合はうまく作れなかったもののその後のまとめで数式の間違いに気づけたのでよかったと思います。

課題研究７班「微分積分」

＜研究テーマ＞

「数理曲線」

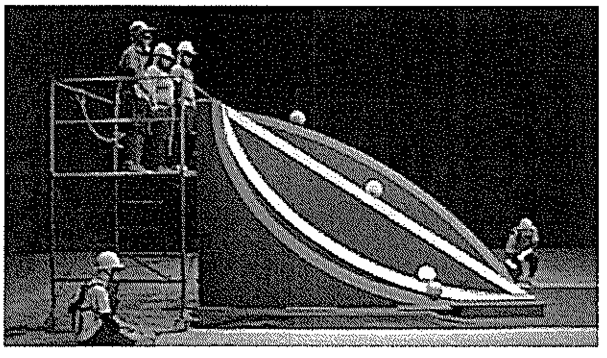
① 最速降下曲線：サイクロイド

② 変分法

③ オイラーの方程式

④ 証明

⑤ まとめ



＜班員＞

3621 鈴木 信彦 3626 萩原 佑季奈

3634 三保 凌太 3638 渡邊 智哉

3639 渡邊 久富

参考文献及びＨＰ：日常にひそむ数理曲線（慶応大学 佐藤雅彦研究室）
大科学実験 NHK for School（http://2.nhk.or.jp）
物理のかぎしっぽ（http://hooktail.sub.jp）

7 班

テーマ「数理曲線」

1. 研究の動機や目的

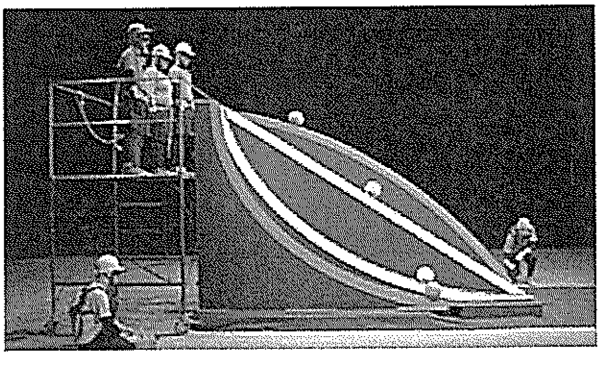
「ピタゴラスイッチ」の慶應義塾大学佐藤雅彦研究室が作った、「日常にひそむ数理曲線（小学館）の DVD を授業でみて、様々な数理曲線に興味を抱き、特にその中でも最速降下曲線について研究解明することにしました。

2. 研究の方法や内容と計画

インターネットを検索していると、NHK の大科学実験のページから「最速降下曲線」の実験に関する項目が出てきた。興味を持った私たちは、実際に NHK の実験で用いていた４つの数理曲線の模型を作り、実際に検証することにした。

[研究計画]

① どの坂道が一番速い速度を生み出すか？予想を立てる。



② 模型を作るために、４つの坂道を作る関数を式で表す。

③ 求めた曲線を、関数ソフトを使って正確に描く。

使用ソフト

数式作成ソフト：スタディーエイド数研

④ 模型の作製と予想の検証

⑤ 最速降下曲線を計算によって求める。

＊汎関数・変分法・オイラーの方程式などの知識について高校数学の理解の範囲内で学習する。

＊サイクロイドであることを計算によって導く。

⑥ まとめ

⑦ 今後の研究の発展性

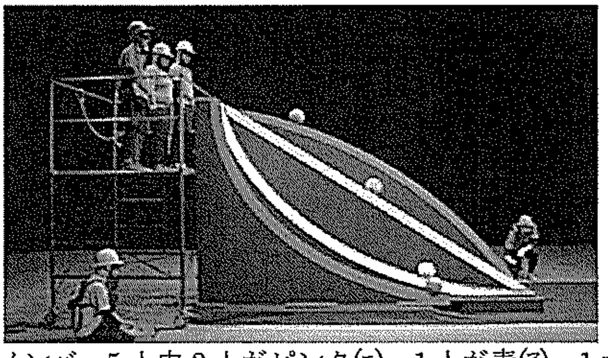
・サイクロイドの等時性について

・緩和曲線（クロソイド）

・サイクロイド、クロソイドの用いられる場面について

3． 研究

① どの坂道が一番速い速度を生み出すか？予想を立てた。

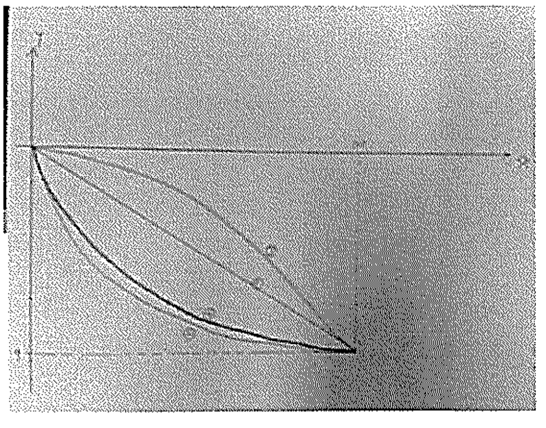


メンバー5人中3人がピンク(エ)、1人が青(ア)、1が白(ウ)と予想。

② 模型を作るために、4つの坂道を作る関数を式で表す。

（手順）

上の図を下記のようにxy平面に表現、玉のスタート地点を原点（0，0）、ゴール地点を実際に測って（9，14.5）と座標で表した。



次に、4つの曲線がそれぞれ以下の関数であると仮定した。

(ア)2次関数（放物線） $y=-ax^2$

(イ)1次関数（直線） $y=ax$

(ウ)サイクロイド（ただし、軸に関して対称移動したもの）

$$\begin{cases} x=A(t-\sin t) \\ y=-A(1-\cos t) \end{cases} \quad 0 \leqq t \leqq \pi$$

(エ)無理関数 $y=-\sqrt{ax}$

スタート地点(0, 0)とゴール地点（9, 14.5）の座標を代入することで、係数を求め関数式で表すと次のようになった。

(ｱ)2次関数（放物線） $y=-0.042x^2$ $(x\geqq 0)$

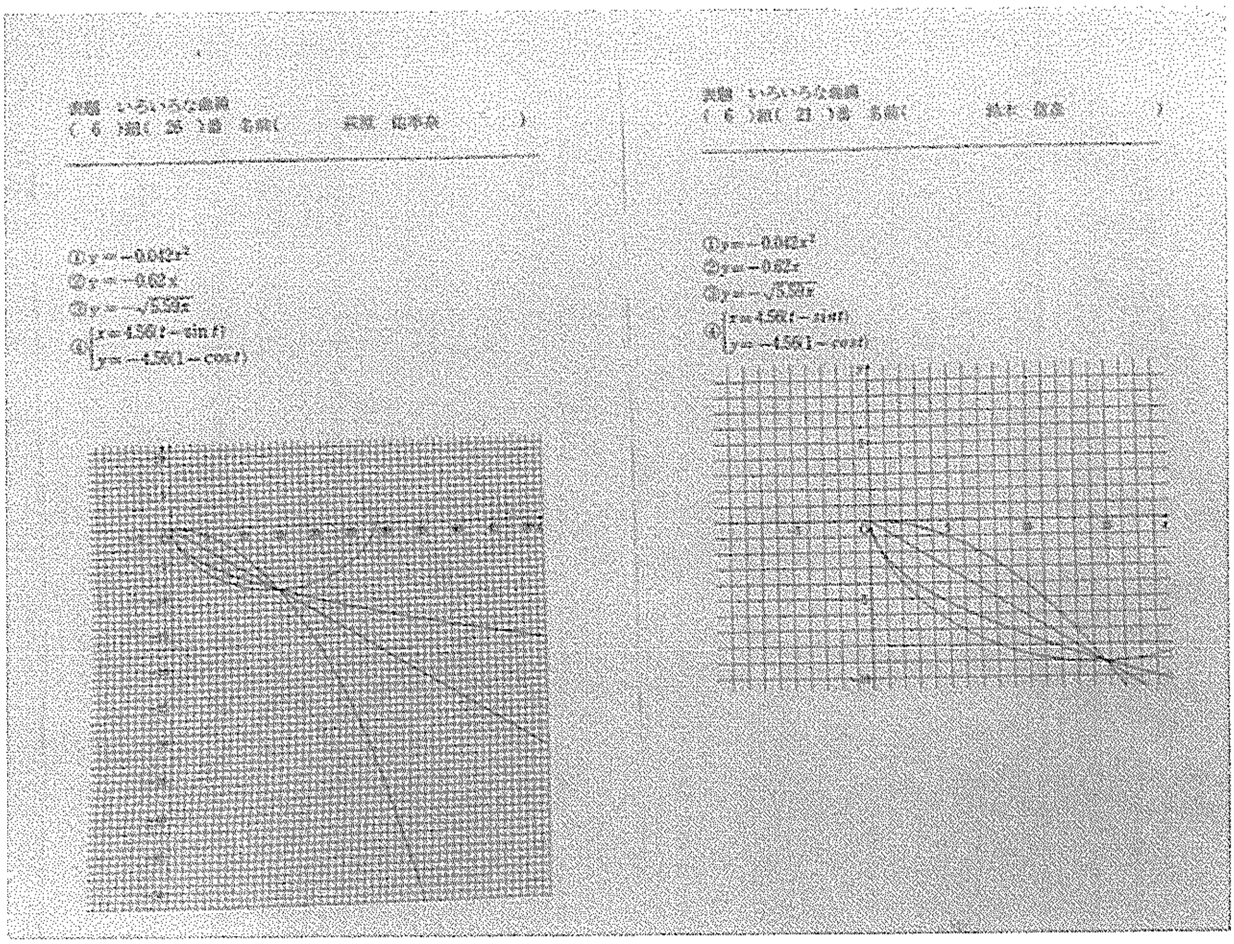
(ｲ)1次関数（直線） $y=0.62x$ $(x\geqq 0)$

(ｳ)サイクロイド（ただし、 軸に関して対称移動したもの）

$$\begin{cases} x=4.56(t-\sin t) \\ y=-4.56(1-\cos t) \end{cases} \quad 0\leqq t\leqq \pi$$

(ｴ)無理関数　$y=-\sqrt{5.59x}$

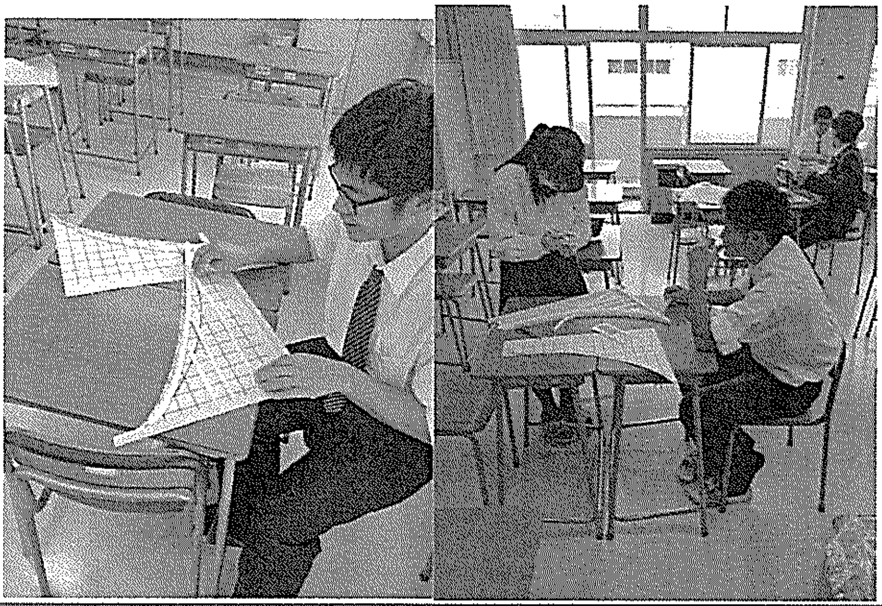
③求めた曲線を、関数ソフト（数式作成ソフト：スタディーエイド数研）を使って正確に描く。

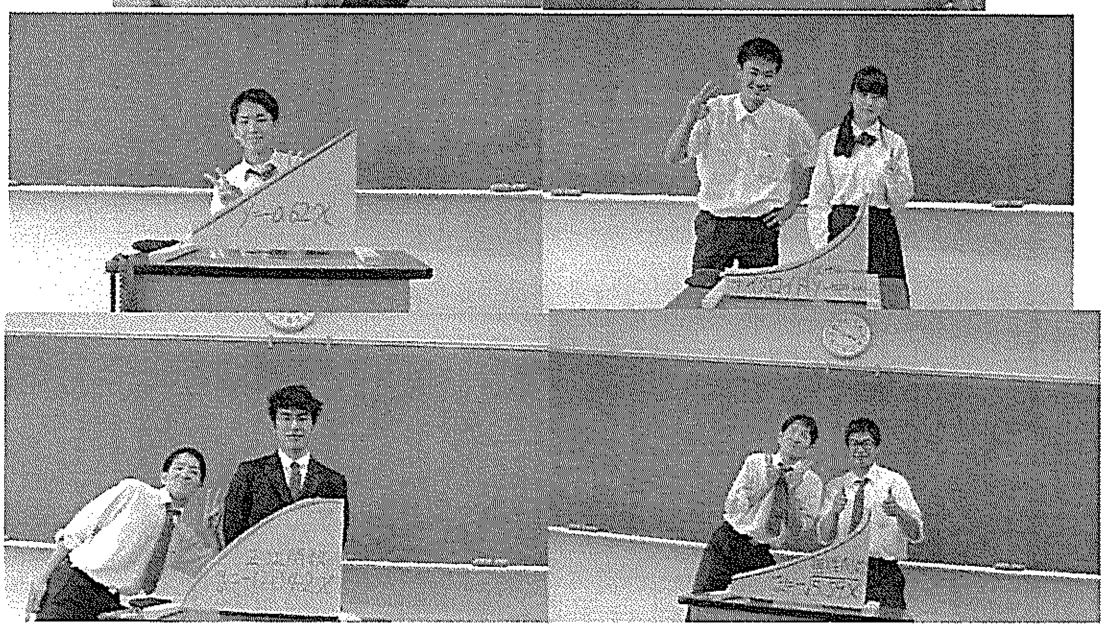


④模型の作成と実験

③で描いた関数を拡大コピーして画用紙に貼り付け模型を作成した。

（模型作成の様子）





（実験の様子）（VTRを流す。）

ナレーション

実験１

実験２

（結果）繰り返し実験の結果、(ウ)サイクロイドが一番早いことがわかった。

⑤最速降下曲線を計算によって求める。

＊１汎関数・変分法・オイラーの方程式などの知識について高校数学の理解の範囲内で学習する。

＊２最速降下曲線がサイクロイドであることを計算によって導く。

（学習１）「変分法とは」

関数 $f=f(x)$ の最大･最小問題を考えるとき、関数を微分し、その導関数 $f'(x)$を調べます。導関数$f'(x)=0$ を満たす x の値に対して、関数 $f=f(x)$ は最大値や最小値、極値をとります。

～$f=f(x)$の最大･最小値、極値を求めるために～

$f'(x)=0$　$[\dfrac{d}{dx}f(x)=0]$　を満たすxが最大値、極大値を与える。

ここで関数 $y=y(x)$ の形によって決まる量 $I\left(x,y,\dfrac{dy}{dx}\right)$ を考えます。

つまり変数が関数になっているの関数です。これを汎関数と呼びます。

この汎関数 $I\left(x,y,\dfrac{dy}{dx}\right)$ の最大･最小問題を考えるのが、変分法です。

上でやった一般の関数 $f=f(x)$ の時と同様の発想で考えると、

汎関数$I\left(x,y,\dfrac{dy}{dx}\right)$の停留値（最大･最小値、極値）を求めるためには、

汎関数$I\left(x,y,\dfrac{dy}{dx}\right)$を変分して、変分の値が$\dfrac{dI}{d\varepsilon}=0$を満たすときを考えれば良いことがわかります。このとき、最大値などになるのです。

つまり、変分法は「関数による関数の微分」といったイメージです

～微分法と変分法の比較～

比較	微分	変分
問題	極値、最小値	極値、最小値
何の極値	関数$f(x)$	汎関数$I\left(x,y,\dfrac{dy}{dx}\right)$
変化するもの	変数x	関数$y,\dfrac{dy}{dx}$が変化
極値では	$f'(x)=0$※	$\dfrac{dI}{dx}=0$※

※同じ

（学習２）オイラーの方程式をもとめる。

テーマ

汎関数$I\left(x,y,\dfrac{dy}{dx}\right)$が極値もしくは停留値（最大値･最小値）を取るとき、$\dfrac{dI}{d\varepsilon}=0$である。このことは、オイラー方程式$\dfrac{\alpha f}{\alpha y}-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\alpha f}{\alpha y}\right)=0$を満たすことと同値であることを確かめる。

$I\left(x,y,\dfrac{dy}{dx}\right)$が極値もしくは停留値をとるとき、

$$\frac{dI}{d\varepsilon}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{オイラー方程式}\frac{\alpha f}{\alpha y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha f}{\alpha y}\right)=0$$

証明

変分法で扱う汎関数は

$I(y)=\displaystyle\int_a^b f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)dx$のように積分の形で表せる。

a…スタート、b…ゴールとする

$y(x)=y_0(x)+\varepsilon n(x)$

↓εで微分

$$\frac{\alpha y}{\alpha\varepsilon}=n(x)$$

↓εで微分

$$\frac{\alpha y'}{\alpha\varepsilon}=n'(x)$$

積分区間の始めと終わりで関数$y(x)$が変化しないように

$n(a)=n(b)=0$

汎関数$I\left(x,y,\dfrac{dy}{dx}\right)$が停留値を取るとき

$\dfrac{dI}{d\varepsilon}=0\cdots$①である。

$$\frac{dI}{d\varepsilon}=\frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b f(x,y,y')dx$$ ＊（連鎖律）多変数関数の合成関数の微分

$$=\int_a^b\left(\frac{\alpha f}{\alpha y}\frac{\alpha y}{\alpha\varepsilon}+\frac{\alpha f}{\alpha y'}\frac{\alpha y'}{\alpha\varepsilon}\right)dx$$

$$=\int_a^b\left\{\frac{\alpha f}{\alpha y}n(x)+\frac{\alpha f}{\alpha y'}n'(x)\right\}dx$$

$$=\int_a^b\frac{\alpha f}{\alpha y}n(x)dx+\int_a^b\frac{\alpha f}{\alpha y'}n'(x)dx$$ ＊2項目に部分積分を使用

$$=\int_a^b\frac{\alpha f}{\alpha y}n(x)dx+\left[\frac{\alpha f}{\alpha y'}n(x)\right]_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}\frac{\alpha f}{\alpha y'}n(x)dx$$

$$=\left\{\frac{\alpha f}{\alpha y'}n(b)-\frac{\alpha f}{\alpha y'}n(a)\right\}+n(x)\int_a^b\left\{\frac{\alpha f}{\alpha y}-\frac{d}{dx}\frac{\alpha f}{\alpha y'}\right\}dx$$

ここで$n(a)=n(b)=0$なので、

$$=n(x)\int_a^b\left\{\frac{df}{dy}-\frac{d}{dx}\frac{df}{dy'}\right\}dx\cdots②$$

①、②より

$$\frac{dI}{d\varepsilon}=n(x)\int_a^b\left\{\frac{df}{dy}-\frac{d}{dx}\frac{df}{dy'}\right\}dx=0$$

$$\therefore\frac{df}{dy}-\frac{d}{dx}\cdot\frac{df}{dy'}=0$$ ＜オイラーの方程式＞

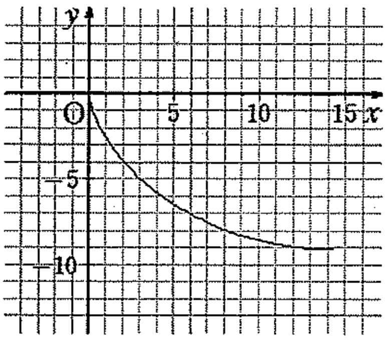
＜変分法の最大値（停留値）問題についてのまとめ＞

変分法で汎関数$I\left(x,y,\dfrac{dy}{dx}\right)$の最大値（停留値）を求めるには、

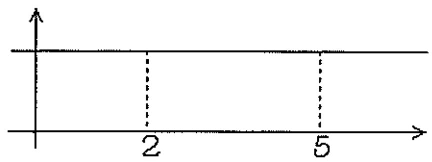
オイラーの方程式を解けばよい。

（学習３）テーマ「最速降下曲線を求める」

玉が転がるのにかかる時間Tを積分の形で表す。



かかる時間$T=\int_{t_a}^{t_b} 1dt$ … ①

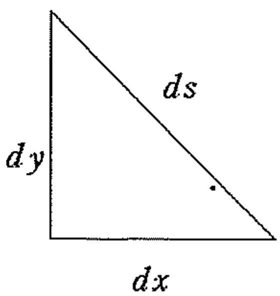


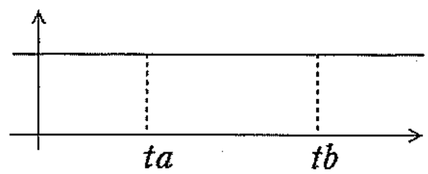
３秒

$$T=3=\int_2^5 1dx$$

↓

曲線の微少要素を ds とすると、





T

$$T=\int_{t_a}^{t_b} 1dt$$

ピタゴラスの定理より

$$ds^2=dx^2+dy^2$$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$=\sqrt{dx^2\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$\therefore \frac{ds}{dx}=-\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdots ②$$

玉の速度vは時間tで距離を微分すれば得られる

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{\cancel{dx}}\cdot\frac{\cancel{dx}}{dt}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\searrow\frac{dt}{ds}=\frac{1}{v}\cdots③$$

∴かかる時間は

$$T=\int_{t_b}^{t_a}1dt$$

$$=\int_{t_b}^{t_a}1\frac{dt}{\cancel{ds}}\cdot\frac{\cancel{ds}}{\cancel{dx}}\cdot\cancel{dx}$$

$$=\int_{t_a}^{t_b}1\cdot\frac{1}{v}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$=\int_0^x\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{v}dx\cdots④$$

ここで玉には重力以外の外力はかかっていないので
エネルギー保存の法則が成立するから

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy$$

$$v=\sqrt{2gy}\cdots⑤$$

④⑤より

$$T=\int_0^x\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}}dx=\int_0^x\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}dx=I(x,y,y')=\int_0^x f(x,y,y')dx$$

$$\therefore f=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\cdots⑥$$ これが最速降下曲線である。

∴T（汎関数）を最小にするので $\frac{dT}{d\varepsilon}=0$

これとオイラーの方程式 $\frac{\alpha f}{\alpha y}-\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\alpha f}{\alpha y'}\right)=0$

を解くことは同値であるが⑥にはxがないのでオイラーの方程式の特別な場合として　ベルトラミの公式

$$f-y'\cdot\left(\frac{\alpha f}{\alpha y'}\right)=C \text{（積分定数）}$$

に⑥を代入することにする。

$$※\frac{\alpha f}{\alpha y'}=\frac{d}{dy'}f=\frac{1}{2}\left(\frac{1+y'^2}{2gy}\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{2y'}{2gy}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+y'^2}{2gy}}}\cdot\frac{y'}{2gy}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{2gy}}$$

$$=\frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}$$

fや$\dfrac{\alpha f}{\alpha y'}$の値をベルトラミの公式に代入して

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}-y'\cdot\frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}=C$$

$$\therefore\frac{\sqrt{(1+y'^2)(1+y'^2)}}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}-\frac{y'^2}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}=C$$

$$\therefore\frac{1+y'^2-y'^2}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}=C$$

$$\therefore\frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}}=C$$

両辺2乗して

$$\frac{1}{2gy(1+y'^2)}=C^2$$

$$1=2gy(1+y'^2)C^2$$

両辺$2gC^2$で割る

$$y(1+y'^2)=\frac{1}{2gC^2}=2A$$ とおく

$$y+y\cdot y'^2=2A$$

$$y'^2=\frac{2A-y}{y}$$

$y'>0$

$$y'=\sqrt{\frac{2A-y}{y}} \cdots ⑦$$

定義より $y\geqq 0,\ 2A-y\geqq 0$ であるから

$0\leqq y\leqq 2A$ である。

また、初期条件として $\theta=0, y=0$ を加えると、

$y=A(1-cos\theta)$ …⑧と媒介変数表示することができます。

$\because\ 0\leqq 1-cos\theta\leqq 2$

これが $0\leqq y\leqq 2A$ と結びついてゆく。

⑧の両辺を θ で微分すると、

$$\frac{dy}{d\theta}=Asin\theta=2Asin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\ dy=Asin\theta d\theta=2Asin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}d\theta \cdots\cdots ⑨$$

⑨を⑦の式に代入すると、

$$\frac{dy}{dx}=y'=\sqrt{\frac{2A-y}{y}}$$

$$=\sqrt{\frac{A+cos\theta}{A-cos\theta}}$$

＊半角の公式

$$=\sqrt{\frac{cos^2\frac{\theta}{2}}{sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-cos\theta}{2}$$

$$=\frac{cos\frac{\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}}$$

$$cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+cos\theta}{2}$$

両辺に dx をかけて

$$dy=\frac{cos\frac{\theta}{2}}{sin\frac{\theta}{2}}dx\cdots\cdots⑩$$

⑨⑩から dy を消去して

$$dx=2Asin^2\frac{\theta}{2}=A(1-cos\theta)d\theta$$

この式の両辺を θ で積分すると

$x=A(\theta-sin\theta)+D$　　D：積分定数

初期条件 $\theta=0,\ x=0$ を考えて $D=0$ だから

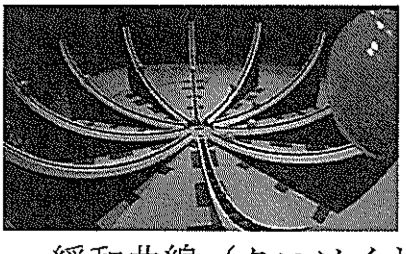
$x=A(\theta-sin\theta)\cdots\cdots⑪$

⑧⑪より、最速降下曲線の媒介変数表示は

$\begin{cases}x=A(\theta-sin\theta)\\y=A(1-cos\theta)\end{cases}$ サイクロイドになりました。

⑥今後の研究の発展性

・サイクロイドの等時性について



どこからスタートしてもゴールが同時になる、サイクロイドの等時性について、検証し、計算によって証明したい。

・緩和曲線（クロソイド）

高速道路のインターチエンジなどに用いられるクロソイド関数。緩和曲線の一種であり、直線と円弧カーブをつなぐつなぎ目で用いられている。ハンドルの切れ角を一定に保ちながら走行することができる。

・サイクロイド、クロソイドの用いられる場面について

ジェットコースターの下りでサイクロイド、方向が変わる地点やカーブが変わる地点にクロソイドが用いられていることを、実際のジェットコースターの画像や図面より関数を取り出して検証したい。

福島県学術教育振興財団助成金により作成しました